رياضيات الجامعية

للسنوات الأولى الجامعية والمعاهد العليا

أ.د. أحمد عبد السلام

الطبعة الثانية (2013)

طرابلس - ليبيا

المحتويات
(Content)

الفصل الأول: المتباينات

الفصل الثاني: الدوال

الفصل الثالث: النهايات

الفصل الرابع: التفاضل

1

المتباينات

Inequalities

(1.1) المجموعات (Sets)

أ- المجموعة أو "الفئة": هي تجمع من العناصر المعرفة تعريفا جيدا. والمقصود بالتعريف الجيد هو "معرفة عما إذا كان عنصرٌ ما من ضمن هذه المجموعة أم لا".

ويرمز عادة للمجموعة بالأحرف الكبيرة $(A, B, C, \ldots)$، أما عناصر المجموعة فيُرمز لها عادة بالأحرف الصغيرة $(a, b, c, \ldots)$، مثلا:

$$A=\{p, q, r\}$$

أي أن عناصر المجموعة (A) هي (p) و(q) و(r). نلاحظ أن كل عنصر من العناصر تفصله عن الآخر فاصله (,) ومجموعة العناصر تكون محصورة بين القوسين $\{\}$. وإذا كان عنصر ما مثل (q) ينتمي إلى مجموعة معينة مثل (A)، فإننا نعبر عن ذلك كالآتي:

$$q \in A$$

أي أن العنصر (q) ينتمي للمجموعة (A).

أما العنصر الذي لا ينتمي للمجموعة (A) مثل (d)، فإننا نعبّر عن هذه الحقيقة كالتالي:

$$d \notin A$$

أي أن العنصر (d) لا ينتمي للمجموعة (A).

وهناك طريقتان لكتابة المجموعة:

1. **طريقة القائمة**: وفيها تُكتب كل عناصر المجموعة صراحة، ومثال ذلك:

$$A=\{1, 2, 3, 4\}$$

أي أن المجموعة (A) تحتوي فقط على الأعداد (1) و(2) و(3) و (4). ومثال آخر:

B={ليبيا، تونس، مصر}

أي أن المجموعة (B) تحتوي على أسماء دول ثلاث فقط هي: ليبيا وتونس ومصر.

2. **طريقة الوصف**: وهي أن نعرّف المجموعة بالخواص التي تتوافر في عناصرها، مثلا:

C={كل أيام الأسبوع}

والتي يمكن كتابتها أيضا كالتالي:

C={x / أحد أيام الأسبوع (x)}

أي أن المجموعة (C) تحتوي على العناصر (x)، حيث (x) هي أحد أيام الأسبوع. ومثال آخر:

$$D=\{x / x^2-4=0\}$$

أي أن عناصر المجموعة (D) هو (x)، حيث (x) حل للمعادلة $(x^2-4=0)$، وهي $(x=+2)$ و $(x=-2)$. أي أن المجموعة (D) تحتوي على العنصرين (2) و (-2).

ملاحظات:

1. ترتيب العناصر عند كتابة المجموعة ليس مهماً، فمثلا المجموعة:

$$A = \{ 3, 1, 2 \}$$

هي نفسها المجموعة:

$$A = \{ 2, 3, 1 \}$$

2. تكرار العناصر عند كتابة المجموعة لا يزيد من عدد عناصرها، فالمجموعة:

$$A = \{ 1, 2, 1, 3, 3, 2, 2 \}$$

تتكون من ثلاث عناصر فقط وهي (1) و(2) و (3).

3. المجموعة الخالية (empty set): وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، ويُرمز لها بالرمز ϕ [وتقرأ فاي]، وتكتب هكذا $\{ \}$. لاحظ أن: $\phi \neq 0$ لأن المجموعة $\{0\}$ تحتوي على عنصر واحد هو صفر.

(1.2) أنواع المجموعات (Types of Sets)

أ- المجموعة المنتهية *(Finite set)*: تكون المجموعة منتهية إذا كانت خالية، أي لا تحتوي على أي عنصر، أو تحتوي على عدد (n) من العناصر، حيث (n) عدد صحيح موجب.

ب- المجموعة الغير منتهية (Infinite set): وهي التي لا يمكن عد عناصرها.

(1.3) مجموعات الأعداد

أ- مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural numbers)، وهي:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$$

ب- مجموعة الأعداد الكلية (Whole numbers)، وهي:

$$W = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$$

جـ - الأعداد الصحيحة (Integers)، وهي:

$$I = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$$

وهناك مجموعات أخرى للأعداد سوف نناقشها في حينها.

(1.4) المجموعات الجزئية (Subsets)

إذا كانت (A) و(B) مجموعتين، وكانت المجموعة (B) تحتوي على كل عناصر المجموعة (A)، فإن المجموعة (A) تكون مجموعة جزئية من المجموعة (B)، وتكتب كالتالي:

$$A \subseteq B$$

مثال: إذا كانت:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

$$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

فإننا نلاحظ أن المجموعة (B) تحتوي على كل عناصر المجموعة (A)، فنعرف المجموعة (A) على أنها مجموعة جزئية من (B)، أي أن:

$$A \subseteq B$$

أي أن كل عناصر المجموعة (A) موجودة في المجموعة (B).

(1.5) المجموعات المتساوية (Equal sets)

إذا كانت المجموعتان (A) و(B) يحتويان على نفس العناصر، بمعنى أن كل عنصر في (A) موجود في (B) وكل عنصر في (B) موجود في (A) – بغض النظر عن الترتيب والتكرار – أي أن المجموعة (A)، مجموعة جزئية من (B)، والمجموعة (B) مجموعة جزئية من (A)، فإنه في هذه الحالة تكون المجموعتان متساويتين، أي أن:

$$A = B$$

مثال: إذا كانت:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$$

و:

$$B = \{ 4, 2, 8, 4, 6, 2 \}$$

فإن:

$$A \subseteq B \ ، \ B \subseteq A$$

أي أن:

$$A = B$$

لأن المجموعتين يحتويان على نفس العناصر.

> **ملاحظة:**
>
> لأي مجموعة (A) تكون:
>
> $$\phi \subseteq A$$
>
> و:
>
> $$A \subseteq A$$
>
> أي أن المجموعة الخالية ϕ مجموعة جزئية لأي مجموعة، وأي مجموعة تكون مجموعو جزئية من نفسها.

(1.6) المجموعات الشاملة (Universal sets)

وهي المجموعة التي تحتوي على كل العناصر محل الدراسة، ويُرمز لها بالرمز (U). فإذا كنا ندرس المجموعة (A) التي تحتوي على كل الأعداد الفردية، فإن المجموعة الشاملة (U) هي مجموعة الأعداد الكلية، أي أن:

$$A \subseteq U$$

لأن كل عنصر في المجموعة (A) موجود في المجموعة الشاملة (U).

(1.7) المجموعة المكملة (Complement set)

تعرف المجموعة المكملة، والتي يرمز لها بالرمز (A^c) أو (A') بأنها المجموعة التي تحتوي على كل العناصر التي لا تحتويها المجموعة (A)، أي أن:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

مثال: إذا كانت:

$A = \{$الأحد، الإثنين، الثلاثاء$\}$

فإن:

$A^c = \{$السبت، الإربعاء، الخميس، الجمعة$\}$

(1.8) الإتحاد والتقاطع (Union and intersection)

إتحاد المجموعتين (A) و (B) يعني كل عناصر المجموعتين، ويُرمز له بالرمز $(A \cup B)$، أي أن:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

مثال: إذا كانت:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

و:

$$B = \{1, 4, 5, 8\}$$

فإن:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 1, 4, 5, 8\}$$

أو:

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

أما تقاطع المجموعتين (A) و (B)، الذي يُرمز له بالرمز $(A \cap B)$، فإنه يعني العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي أن:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad , \quad x \in B\}$$

ففي المثال السابق يكون:

$$A \cap B = \{1, 5\}$$

أي أن العدد (1) والعدد (5) موجودان في المجموعة (A) وفي المجموعة (B).

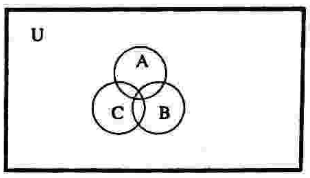
ملاحظة:

إذا لم يوجد أي عنصر مشترك بين المجموعتين، فإننا نعبر عن ذلك كالتالي:

$$A \cap B = \phi$$

(1.9) رسومات ڤين (Venn diagrams)

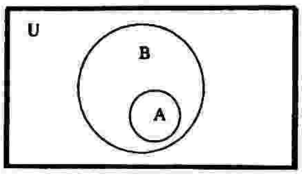
من المفيد أحيانا أن نرسم المجموعات كدوائر داخل مستطيل، حيث يرمز هذا المستطيل للمجموعة الشاملة (U) كما في شكل (1.1). هذا الرسم، والذي يُعرف برسومات ڤين يجعلنا نتصور بسهولة العمليات المختلفة بين المجموعات.



شكل (1.1)

في ضوء هذه الرسومات نعيد تعريفنا لعمليات المجموعات كالتالي:

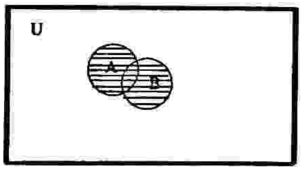
في شكل (1.2a)، الدائرة التي تمثل المجموعة (A)، هي مجموعة جزئية من مجموعة أكبر منها وهي المجموعة (B)، ونرى أن الدائرة (A) تقع كلها داخل الدائرة (B)، مما يعني أن كل عنصر في المجموعة (A) هو عنصر في المجموعة (B).



شكل (1.2a)

$A \subseteq B$

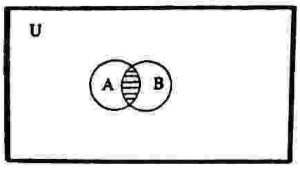
أما الشكل (1.2b) فإنه يمثل إتحاد المجموعتين (A) و (B)، وهو كل العناصر في المجموعتين، ونمثله بتضليل الدائرتين.



شكل (1.2b)

$A \cup B$

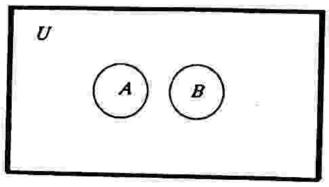
يمثل الشكل (1.2c) تقاطع المجموعتين (A) و (B)، وهو الجزء المضلل في الشكل.



شكل (1.2c)

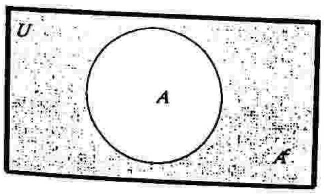
$A \cap B$

في شكل (1.2d) نرى أن الدائرتين منفصلتان، أي لا يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين، وفي هذه الحالة يكون تقاطع المجموعتين خاليا، بمعنى أن:



شكل (1.2d)
$A \cap B = \phi$

في شكل (1.2e) نرى أن المجموعة (A) داخل المجموعة الشاملة (U)، فتكون المجموعة المكملة (A^c) هي كل عنصر خارج المجموعة (A)، وهو الجزء المضلل في الشكل.



شكل (1.2e)
A^c : الجزء المضلل

(1.10) الأعداد الحقيقية (real numbers)

تضم الأعداد الحقيقية والتي نرمز لها بالرمز $\Re$ الأعداد الطبيعية $(1, 2, 3, 4, ...)$ والأعداد الكلية $(0, 1, 2, 3, 4, ...)$ والأعداد الصحيحة $(....., -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...)$، بالإضافة إلى الأعداد القياسية؛ وهي الأعداد التي يمكن كتابتها كحاصل قسمة بين عددين صحيحين مثل $(\frac{17}{24}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4})$[1]، والأعداد الغير قياسية وهي التي لا يمكن كتابتها كحاصل قسمة عددين صحيحين مثل $(\sqrt{2} = 1.4142...)$ و $(\pi = 3.1415...)$.

ونعبّر عن الأعداد الحقيقية بيانيا وذلك برسم خط أفقي مستقيم كالذي في شكل (1.3). يمثل منتصف الخط نقطة "الصفر" وتُسمى بنقطة الأصل.



شكل (1.3)

[1] القسمة على الصفر غير مسموح بها لأن النتيجة تكون غير معرفة.

يُقسم الخط على يمين الصفر إلى مسافات متساوية كل مسافة تمثل وحدة واحدة، وتكون موجبة. ويُقسم يسار الصفر إلى نفس المسافات المتساوية وتمثل كل مسافة وحدة واحدة، وتكون سالبة.

لا توجد نهاية للأعداد التي على يمين نقطة الأصل "الصفر" ولا توجد نهاية للأعداد على يسار نقطة الأصل؛ بمعنى أن خط الأعداد الحقيقية يمتد من سالب مالانهاية $(-\infty)$ إلى موجب مالانهاية $(+\infty)$.

وسنناقش بعض القوانين التي تحكم الأعداد الحقيقية:

أ- قوانين جمع "أو طرح" الأعداد الحقيقية

إذا كانت (a) و(b) و(c) أعداداً حقيقية سواء كانت سالبة أم موجبة، قياسية أو غير قياسية، فإنها تخضع لقوانين الجمع التالية:

(1) قانون التنسيق:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

مثلا:

$$5+(3+7)=(5+3)+7$$

(2) قانون التبديل:

$$a+b=b+a$$

مثلا:

$$4+8=8+4$$

(3) قانون التوزيع:

$$a(b+c)=ab+ac$$

مثلا:

$$5(2+3)=5\times2+5\times3$$

(4) المحايد الجمعي:

إذا أضفنا الصفر لأي عدد حقيقي، أو أضفنا أي عدد حقيقي للصفر، فإن حاصل الجمع يكون نفس العدد. ويُسمى "الصفر" بالمحايد الجمعي، بمعنى أنه لا يؤثر في عملية الجمع، أي أن:

$$a+0=0+a$$

مثلا:

$$4+0=0+4$$

(5) إذا كانت (a) عدداً حقيقيا، فإنه دائما يوجد عدد حقيقي آخر وحيد $(-a)$ عند جمعه مع (a) تكون نتيجة الجمع صفراً، أي أن:

$$a+(-a)=0$$

مثلا:

$$4+(-4)=0$$

ب- قوانين ضرب "أو قسمة" الأعداد الحقيقية

تخضع الأعداد الحقيقية لقوانين الضرب التالية:

(1) قانون التنسيق:

$$a(bc)=(ab)c$$

مثلا:

$$2(4\times7)=(2\times4)7$$

(2) قانون التبديل:

$$ab=ba$$

مثلا:

$$5\times7=7\times5$$

(3) قانون التوزيع:

$$(a+b)c=ac+bc$$

مثلا:

$$(2+3)8=2\times8+3\times8$$

(4) المحايد الضربي:

إذا ضربنا أي عدد حقيقي في العدد الواحد الصحيح، فإن العدد لا يتغير، ويُسمى العدد (1) بالمحايد الضربي، أي أنه لا يؤثر في عملية الضرب، أي أن:

$$a\times1=1\times a=a$$

مثلا:

$$4\times1=1\times4=4$$

(5) إذا كانت (a) عدداً حقيقيا ولا يساوي صفراً، فإنه دائما يوجد عدد حقيقي وحيد (a^{-1}) حاصل ضربه مع (a) يكون الواحد الصحيح، أي أن:

$$a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1$$

مثلا:

$$7\times7^{-1}=7\times\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\times7=1$$

(1.11) خواص الترتيب (properties of order)

إذا كانت (a) و(b) و(c) أعداداً حقيقية، فإننا نعرّف خواص الترتيب كالتالي:

أ- (a) أصغر من (b):

$$a<b$$

ب- (a) أصغر من أو تساوي (b):

$$a\le b$$

جـ- (a) أكبر من (b):

$$a>b$$

د- (a) أكبر من أو تساوي (b):

$$a \geq b$$

أما القواعد التي تحكم الترتيب فهي:

1. إذا كانت $(a < b)$ و $(b < c)$، فإن $(a < c)$

مثلا:

$(3 < 4)$ و $(4 < 5)$، فإن $(3 < 5)$

2. إذا كانت $(a < b)$، فإن:

$$a \pm c < b \pm c$$

مثلا:

$$3 < 7$$

$$3 \pm 2 < 7 \pm 2$$

3. إذا كانت $(a < b)$، وكانت (c) عددًا موجبا، فإن:

$$ac < bc$$

مثلا:

$$4 < 7$$
$$4 \times 2 < 7 \times 2$$
$$8 < 14$$

4. إذا كانت $(a < b)$، وكانت (c) عددًا سالبا، فإن:

$$ac > bc$$

[أي في حالة الضرب في عدد سالب، فإن إشارة المتباينة تتغير]

مثلا:

$$4 < 7$$
$$4(-2) < 7(-2)$$
$$-8 > -14$$

(1.12) الفترات (intervals)

أ- الفترة المفتوحة (open interval)

إذا كانت (x) عددًا حقيقيا وكانت أكبر من العدد (a) وأصغر من العدد (b)، ولكنها لا تساوي أيًا منهما، فإنه يقال عن المجموعة (a, b) بالفترة المفتوحة، وهي تحتوي على كل العناصر بين العنصرين (a) و (b) ولكنها لا تحتوي العنصرين (a) و (b). بمعنى أن:

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

أي أن : $a \notin (a,b)$ و $b \notin (a,b)$

ونرسم ما سبق بيانيا على خط الأعداد كالتالي:



القوسان (.......) يعنيان أن المجموعة مفتوحة من طرفيها، والدائرتان المفتوحتان تعني أن العددين (a) و (b) ليسا من ضمن المجموعة.

مثلا: المجموعة $(-2,5)$ ترسم على خط الأعداد الحقيقي كالتالي:



أي أن هذه المجموعة تحتوي على كل الأعداد الحقيقية بين العددين الحقيقيين (-2) و (5)، دون أن تكون (-2) و (5) من ضمنها، أي أن:

$5 \in (-2,5)$ و $-2 \in (-2,5)$

ب- الفترة المغلقة (closed interval)

إذا كانت (x) عدداً حقيقياً وكانت أكبر من أو تساوي العدد (a) وأصغر من أو تساوي العدد (b)، فإنه يقال عن المجموعة $[a, b]$ بالفترة المغلقة، أي أنها تحتوي على كل العناصر بين العددين (a) و (b) بما فيها العددين (a) و (b)، بمعنى أن:

$$[a,b]=\{x \mid a\le x\le b\}$$

أي أن: $a\in[a,b]$ و $b\in[a,b]$

ونرسمها على خط الأعداد الحقيقي كالتالي:



القوسان [.......] يعنيان أن الفترة مغلقة من طرفيها، والدائرتان المغلقتان تعني أن العددين (a) و (b) من ضمن الفترة.

مثلا: المجموعة $[-2,5]$ ترسم بيانيا كالتالي:



أي أن هذه المجموعة تحتوي على كل الأعداد الحقيقية بين العددين الحقيقيين (-2) و (5)، بما فيها العددين (-2) و (5)، بمعنى أن:

$5\in[-2,5]$ و $-2\in[-2,5]$

جـ- الفترة النصف مفتوحة أو النصف مغلقة
(half-open or half-closed interval)

تكتب المجموعة في هذه الحالة كالتالي:

$[a,b)$، حيث يعني القوس (... أن الفترة مفتوحة من هذه الناحية، والقوس ...] يعني أن الفترة مغلقة من هذه الناحية. أي أن المجموعة تحتوي على كل الأعداد بين (a) و (b)، ولكنها تحتوي على العدد (a) ولا تحتوي على العدد (b).

أي أن:

$b\notin[a,b)$ و $a\in[a,b)$

ونرسم ما سبق بيانيا كالتالي:



فمثلا: المجموعة $[-2,5)$ تُرسم على خط الأعداد كالتالي:



أي أن هذه الفترة تحتوي على العدد (-2) ولا تحتوي على العدد (5)، أي أن:

$5\notin[-2,5)$ و $-2\in[-2,5)$

....

أما الفترة $(a,b]$، فإنها تعني أن العدد (a) ليس من ضمن عناصرها بينما العدد (b) من ضمنها، أي أن:

$b\in(a,b]$ و $a\notin(a,b]$

وتُرسم على خط الأعداد كالتالي:



مثلا: تُرسم الفترة $(-2,5]$ كالتالي:



أي أن هذه الفترة لا تحتوى على العدد (-2)، ولكنها تحتوى على العدد (5)، أي أن:

$5\in(-2,5]$ و $-2\notin(-2,5]$

د- الفترة اللانهائية (infinite interval)

تُكتب الفترة في هذه الحالة بأحد الطرق التالية:

1. $[a,\infty)$: وتعني أنها تحتوي على كل الأعداد التي تكون أكبر من أو تساوى (a)، أي:

$[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$

وتُرسم على خط الأعداد كالتالي:



فمثلا الفترة $[4,\infty)$ تحتوى على كل الأعداد التي تكون أكبر من أو تساوي (4)، وتُرسم هذه الفترة كالتالي:



أي أن:

$4 \in [4,\infty)$

2. $(-\infty,a]$: وتعني أنها تحتوي جميع الأعداد التي تكون أصغر من أو تساوى (a)، أي:

$(-\infty,a] = \{x \mid x \leq a\}$

وتُرسم على خط الأعداد كالتالي:



فمثلا الفترة $(-\infty,4]$ تحتوى على كل الأعداد التي تكون أصغر من أو تساوي (4)، وتُرسم على خط الأعداد كالتالي:



أي أن:

$4 \in (-\infty,4]$

3. (a,∞): وتعني أنها تحتوي جميع الأعداد التي تكون أكبر من (a) ولا تساوي (a)، أي:

$(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$

وتُرسم بيانيا كالتالي:



فمثلا الفترة $(4,\infty)$ تحتوى على كل الأعداد التي تكون أكبر من العدد (4)، ولكنها لا تساوي (4) وتُرسم كالتالي:



أي أن:

$4 \notin (4,\infty)$

4. $(-\infty, a)$: وتحتوي على كل الأعداد التي تكون أصغر من (a)، ولكنها لا تساوى (a)، أي أن:

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

وتُرسم بيانيا كالتالي:



فمثلا الفترة $(-\infty, 4)$ تحتوى على كل الأعداد التي تكون أصغر من العدد (4) ولكنها لا تحتوى على العدد (4)، ونرسمها بيانيا كالتالي:



أي أن:

$$4 \notin (-\infty, 4)$$

5. مجموعة الأعداد الحقيقية

والتي نرمز لها بالرمز $\Re$، وتُكتب كالتالي:

$$\Re = (-\infty, \infty)$$

وهي تحتوى على كل الأعداد الحقيقية من $(-\infty)$ إلى $(+\infty)$، وترسم هذه الفترة كالتالي:



(1.13) المتباينات (inequalities)

المتباينة هي صيغة رياضية تحتوى على رموز الترتيب $\{<, >, \leq, \geq\}$. وحل المتباينة هو إيجاد مجموعة حل للمتباينة.

مثلا مجموعة الحل للمتباينة $(x < 4)$ هي:

$\{x \mid x < 4\}$ ، أي أن مجموعة الحل هى أي عدد أصغر من العدد (4)، أي أن مجموعة الحل هى $(-\infty, 4)$، والتي نمثلها بيانيا كالتالي:



•••••••••••

ونعرض هنا بعض أنواع المتباينات مع أمثلة متنوعة عن كل نوع؛

أ- المتباينة الخطية (linear inequalities)

وهي المتباينة التي يمكن كتابتها كالتالي:

$$ax+b>0$$

حيث $(a\neq 0)$، [أيضا يمكن إستعمال أي رمز من رموز الترتيب: > أو < أو ≤ أو ≥]

مثال (1.1): أوجد مجموعة الحل للمتباينة التالية:

$$2x-3\geq 11$$

الحـــــــل:

نكتب المتباينة:

$$2x-3\geq 11$$

نضيف (+3) لطرفي المتباينة:

$$2x-3+(+3)\geq 11+(+3)$$
$$2x+0\ \geq 14$$
$$2x\ \geq 14$$

وبقسمة طرفي المتباينة على معامل (x) وهو (2)، نحصل على:

$$x\geq 7$$

أي أن مجموعة الحل هي كل الأعداد التي تكون فيها (x) أكبر من أو تساوي العدد (7)، أي أن قيمة (x) تكون بين العدد $(+7)$ و $(+\infty)$، حيث $(+7)$ تكون من ضمن الحل، أي أن:

$$+7\leq x<+\infty$$

أي أن:

$$x\in[7,+\infty)$$

أو:

$$\{x\,|\,x\geq 7\}$$

بمعنى أن مجموعة الحل للمتباينة هي الأعداد التي تكون في الفترة اللانهائية $[7,\infty)$، والتي نمثلها بيانيا كالتالي:



مثـال (1.2): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$-3x+5>-7$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$-3x+5>-7$$

نضيف (-5) لطرفي المتباينة:

$$-3x+5+(-5)>-7+(-5)$$
$$-3x>-12$$

وبقسمة طرفي المتباينة على العدد (-3) مع ملاحظة أنه يجب تغيير إشارة المتباينة، فنحصل على:

ملاحظة : الضرب أو القسمة على عدد سالب يغير إشارة المتباينة.

$$\frac{-3}{-3}x<\frac{-12}{-3}$$

$$x<4$$

أي أن مجموعة الحل للمتباينة هي كل الأعداد التى تكون فيها (x) أقل من العدد (4)، أي أن قيمة (x) تكون بين العدد (4) ولا يساوي (4) و $(-\infty)$، أي أن:

$$-\infty<x<4$$

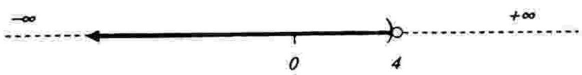
أي أن:

$$x\in(-\infty,4)$$

أو:

$$\{x | x<4\}$$

أي أن مجموعة الحل تكون في الفترة اللانهائية $(-\infty,4)$، والتي نرسمها بيانيا كالتالي:



ب- المتباينات ذات الثلاث أجزاء.

وهي المتباينة التي تتكون من ثلاث أجزاء مثل:

$$-2<5+3x<20$$

وحل هذه المتباينة يكون بنفس طريقة حل المتباينة الخطية للثلاث أجزاء في نفس الوقت.

مثـال (1.3): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$-2 < 5 + 3x < 20$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$-2 < 5 + 3x < 20$$

أضف العدد (5−) لكل أطراف المتباينة:

$$-2 + (-5) < 5 + 3x + (-5) < 20 + (-5)$$

فنحصل على:

$$-7 < 3x < 15$$

وبقسمة كل أطراف المتباينة على معامل (x) وهو (3) [وحيث أننا نقسم أطراف المتباينة على عدد موجب فإن إشارات المتباينة لا تتغير] فنحصل على:

$$\frac{-7}{3} < \frac{3}{3}x < \frac{15}{3}$$

$$\frac{-7}{3} < x < 5$$

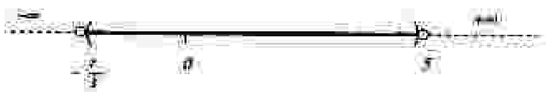
أي أن (x) أصغر من (5)، وأكبر من ($-\frac{7}{3}$)، أي أن:

$$x \in \left(-\frac{7}{3}\ ,\ 5\right)$$

أو:

$$\left\{x \mid -\frac{7}{3} < x < 5\right\}$$

أي أن مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $\left(-\frac{7}{3}, 5\right)$، ويمثلها على خط الأعداد كالتالي:



مثـال (1.4): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$-5 < 3x - 2 < 1$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$-5 < 3x - 2 < 1$$

نضيف العدد (2+) لكل أطراف المتباينة:

$$-5 + (+2) < 3x - 2 + (+2) < 1 + (+2)$$

$$-3 < \ 3x \ < 3$$

بقسمة كل أطراف المتباينة على العدد (3) نحصل على:

$$-\frac{3}{3}<\frac{3}{3}x<\frac{3}{3}$$

$$-1<x<1$$

أي أن أي عدد حقيقي يقع بين (1-) و (1) هو حل *للمتباينة*، أي أن:

$$x\in(-1,1)$$

أو:

$$\{x|-1<x<1\}$$

أي أن مجموعة الحل تكون في الفترة المفتوحة (1,1-)، والتي نمثلها على خط الأعداد كالتالي:



ج- المتباينات من الدرجة الثانية (quadratic inequalities)

المتباينة من الدرجة الثانية تكون في صورة:

$$ax^2+bx+c>0$$

حيث $(a\neq0)$. [أيضا يمكن إستعمال أي رمز من رموز الترتيب: ≥ أو > أو ≤].

مثـال (1.5): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$2x^2+5x-12\geq0$$

الحـــل:

نكتب المتباينة:

$$2x^2+5x-12\geq0$$

نحلل المتباينة إلى حاصل ضرب قوسين؛

$$(2x-3)(x+4)\geq0$$

لكي تكون المتباينة صحيحة يجب أن يكون حاصل ضرب القوسين موجبا – لأن المتباينة أكبر من أو تساوي صفرا – وهذا لا يأتي إلا إذا كان حاصل ضربهما موجبا، بمعنى أن يكون القوسان إما موجبين أو سالبين، أي أن:

إما:

$(2x-3)\geq0$ أي: $x\geq\frac{3}{2}$

و:

$(x+4)\geq0$ أي: $x\geq-4$

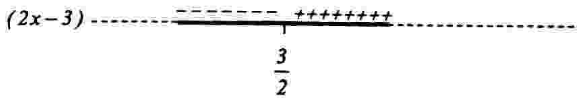
أو:

$(2x-3)\leq 0$ أي: $x\leq \frac{3}{2}$

و:

$(x+4)\leq 0$ أي: $x\leq -4$

ونوضح هذا على خط الأعداد بالنسبة للمتباينة $(2x-3)$ كالتالي:



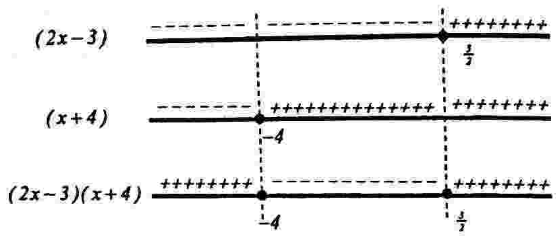
أي أن النقطة $(\frac{3}{2})$ تقسّم خط الأعداد إلى قسمين، فإذا كانت $(x\geq \frac{3}{2})$ يكون القوس $(2x-3)$ موجبا، وإذا كانت $(x\leq \frac{3}{2})$ يكون القوس سالبا.

أما بالنسبة للمتباينة $(x+4)$، يكون كالتالي:



أي أن النقطة (-4) تقسّم خط الأعداد إلى جزئين، فإذا كانت $(x\geq -4)$ يكون القوس $(x+4)$ موجبا، وإذا كانت $(x\leq -4)$ يكون القوس $(x+4)$ سالبا.

وعلينا أن نختار مجموعة الحل للمتباينة بحيث تكون $[(2x-3)(x+4)]$ موجبة، أي أن تكون المتباينة صحيحة. لإيجاد ذلك نعيد رسم الخط للمتباينتين كالتالي:



الآن نريد أن نجد الفترة "أو الفترات" التي تكون فيها:

$$(2x-3)(x+4)>0$$

أي موجبة.

نرى أن خط الأعداد الذي يمثل $(2x-3)(x+4)$ قد إنقسم إلى (3) فترات.

1. الفترة الأولى من $(-\infty)$ إلى النقطة (-4) حيث حاصل ضرب القوسين موجب، لأن القوسين سالبان.

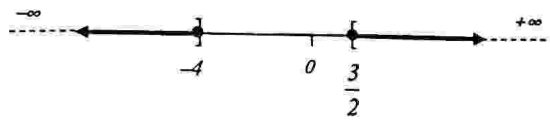
2. الفترة الثانية من النقطة (-4) إلى النقطة $(\frac{3}{2})$ حيث حاصل ضرب القوسين سالب، لأن القوس $(2x-3)$ سالب والقوس $(x+4)$ موجب.

3. الفترة الثالثة من النقطة $(\frac{3}{2})$ إلى النقطة $(+\infty)$ حيث حاصل ضرب القوسين موجب، لأن القوسين موجبان.

أي أن المتباينة موجبة، أو تساوي صفرا في الفترتين $(-\infty,-4]$ و $[\frac{3}{2},+\infty)$. وهاتان الفترتان هما مجموعة حل المتباينة، أي مجموعة الحل هي إتحاد الفترتين، أي أن مجموعة الحل هي:

$$(-\infty,-4] \cup [\tfrac{3}{2},+\infty)$$

ونرسم مجموعة الحل بيانيا على خط الأعداد كالتالي:



مثـال (1.6): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$x^2-x-12<0$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$x^2-x-12<0$$

نحلل المتباينة إلى حاصل ضرب قوسين؛

$$(x+3)(x-4)<0$$

أي أن حاصل ضرب القوسين يجب أن يكون سالبا !

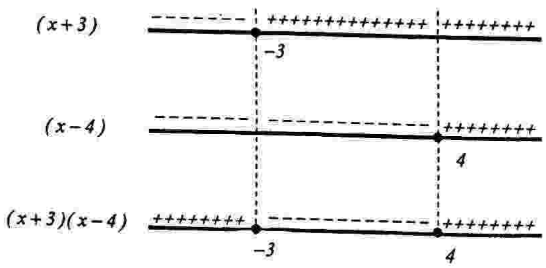
لقد أطلنا الشرح في حل المثال السابق، ولكننا هنا نبدأ الحل بإيجاد النقطتين اللتين تقسمان خط الأعداد، وهما:

$(x+3<0)$ ، أي أن: $(x<-3)$

و:

$(x-4<0)$ ، أي أن: $(x<4)$

ونرسم خط الأعداد لكل قوس:



فتكون فترة الحل هي الفترة التي يكون فيها حاصل ضرب القوسين سالبا، وهي الفترة $(-3,4)$، ونمثلها بيانيا كالتالي:



د- **المتباينات التي تكون في صورة كسر، وهي المتباينة التي تكون في صورة:** $(\frac{ax+b}{cx+d})$

مثال (1.7): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$\frac{5}{x+4} \geq 1$$

الحــــــل:

نكتب المتباينة:

$$\frac{5}{x+4} \geq 1$$

من الوهلة الأولى يبدو أننا نستطيع ضرب طرفي المتباينة في وسطيها، فنحصل على:

$$5 \geq x+4$$

ولكن السؤال الذي يطرح نفسه هل تتغير إشارة المتباينة أم لا ؟. فنحن لا نعرف عما إذا كانت $(x+4)$ موجبة أم سالبة !.

ولكي لا نطرح هذا السؤال من الأساس فإننا نضرب طرفي المعادلة في مربع المقام، أي في $(x+4)^2$ لأنها دائما كمية موجبة، وبالتالي نضمن أن إشارة المتباينة لا تتغير ، فنحصل على:

$$(x+4)^2 \frac{5}{(x+4)} \geq (x+4)^2$$

في الطرف الأيسر للمتباينة نختصر $(x+4)$ في المقام مع $(x+4)$ في البسط – على شرط أن $(x \neq -4)$، لأن هذا يجعل المقام صفرا – فنحصل على:

$$5(x+4) \geq (x+4)^2$$

ولكن هل نستطيع قسمة طرفي المتباينة على $(x+4)$ ؟ طبعا لا !! لأننا سنقع في الفخ الذي هربنا منه، وهو هل نحن نقسّم المتباينة على كمية موجبة أو كمية سالبة؟ بمعنى هل تتغير إشارة المتباينة أم لا؟

لتفادي كل ذلك نكتب المتباينة بحيث يكون الصفر فقط في الطرف الأيمن للمتباينة كالتالي:

$$5x+20 \geq x^2+8x+16$$

وبنقل الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر لنجعل المتباينة صفرية، نحصل على:

$$-x^2 - 3x + 4 \ge 0$$

وبضرب طرفي المتباينة في (-1) وتغيير إشارة المتباينة، لأننا ضربنا في كمية سالبة، فنحصل على:

$$x^2 + 3x - 4 \le 0$$

أي أننا جعلنا المتباينة متباينة صفرية من الدرجة الثانية.

نحلل المتباينة إلى حاصل ضرب قوسين؛

$$(x-1)(x+4) \le 0 \quad \text{و} \quad x \ne -4$$

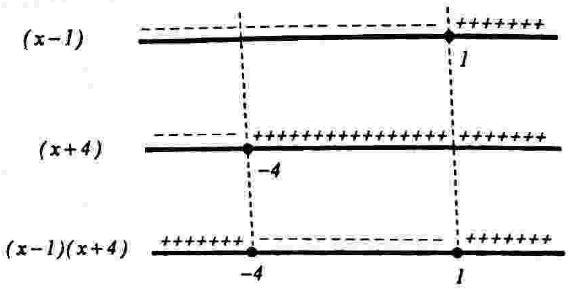
أي أن حاصل ضرب القوسين يجب أن يساوى صفرا أو كمية سالبة؛ فنجد النقطتين اللتين تقسمان خط الأعداد، وهما:

$x \le 1$ أي $(x-1 \le 0)$

و:

$x \le -4$ أي $(x+4 \le 0)$

ونرسم خط الأعداد لكل قوس:



فتكون فترة الحل هي الفترة التى يكون فيها حاصل ضرب القوسين سالبا، وهي الفترة النصف مفتوحة $[-4,1]$. لاحظ أن العدد (1) من ضمن مجموعة الحل، بينما العدد (-4) ليس من ضمن مجموعة الحل لأن هذا سيجعل المقام صفرا !!، ونمثل مجموعة الحل على خط الأعداد كالتالي:



مثال (1.8): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$\frac{4x+5}{x+2} \ge 3$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$\frac{4x+5}{x+2} \ge 3$$

نضرب طرفي المعادلة في مربع المقام:

$$(x+2)^2 \frac{4x+5}{(x+2)} \ge 3(x+2)^2$$

في الطرف الأيسر نختصر $(x+2)$ التى في المقام مع $(x+2)$ التى في البسط – بشرط أن $(x \ne -2)$– فنحصل على:

$$(x+2)(4x+5) \ge 3(x+2)^2$$

$$4x^2+13x+10 \ge 3x^2+12x+12$$

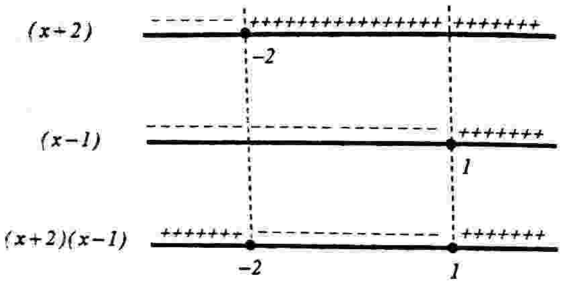
نجعل المتباينة صفرية:

$$x^2+x-2 \ge 0$$

نحلل المتباينة إلى حاصل ضرب قوسين:

$$(x+2)(x-1) \ge 0 \quad , \quad x \ne -2$$

أي أن حاصل ضرب القوسين يجب أن يكون موجبا أو صفرا. عند النقطتين (-2) و (1) نرسم خط الأعداد كالتالي:



فتكون مجموعة الحل هي الفترة التى يكون فيها حاصل ضرب القوسين موجبا، وهي الفترتان $(-\infty,-2)$ أو $[1,+\infty)$. لاحظ أن (-2) ليست من ضمن الحل، و العدد (1) من ضمن الحل.

ونرسم مجموعة الحل على خط الأعداد كالتالي:



(1.14) القيم المطلقة (absolute values)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي (a) – وتكتب هكذا $|a|$ – هي المقدار الموجب لهذا العدد، فمثلا القيمة المطلقة للعدد $|27|$ هي العدد الموجب (27) ؛

والقيمة المطلقة للعدد $|-14|$ هي العدد الموجب (14). ونعرف القيمة المطلقة للعدد (a) كالتالي:

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \ge 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$$

فإذا كان العدد (a) موجبا، بمعنى أن $(a \ge 0)$ ، فإن القيمة المطلقة للعدد تكون هي العدد نفسه، مثل:

$$|\sqrt{9}| = +3 \quad ، \quad |\pi| = +\pi \quad ، \quad |40| = +40$$

أما إذا كان العدد (a) سالبا، أي أن $(a < 0)$، فإن القيمة المطلقة للعدد تكون إشارتها عكس إشارة العدد (a)، مما يجعل القيمة المطلقة للعدد موجبة، مثل:

$$|-40| = -(-40) = +40$$

$$|-\pi| = -(-\pi) = +\pi$$

$$|-\tfrac{1}{7}| = -(-\tfrac{1}{7}) = +\tfrac{1}{7}$$

أي أن القيمة المطلقة للعدد دائما موجبة، سواء كان العدد موجبا أم سالبا.

وهذه مزيد من الأمثلة المتنوعة لنؤكد ماسبق ذكره:

a) $|\sqrt{8} - 2|$

حيث أن $(\sqrt{8} \approx 2.828)$ أكبر من العدد (2)، فيكون $|\sqrt{8} - 2|$ عدداً موجبا، والقيمة المطلقة للعدد الموجب هي العدد نفسه، أي أن:

$$|\sqrt{8} - 2| = \sqrt{8} - 2 = 2.828 - 2 = 0.828$$

b) $|1.7 - \pi|$

حيث أن $(\pi = 3.14)$ فإن $(1.7 - \pi)$ تكون سالبة، فيكون الحد المطلق في هذه الحالة:

$$|1.7 - \pi| = -(1.7 - \pi) = \pi - 1.7 = 3.14 - 1.7 = 1.44$$

c) $|3 - \sqrt{15}|$

حيث أن $(\sqrt{15} \approx 3.873)$ فإن $(3 - \sqrt{15})$، تكون سالبة، فيكون الحد المطلق:

$$|3 - \sqrt{15}| = -(3 - \sqrt{15}) = \sqrt{15} - 3 = 3.873 - 3 = 0.873$$

$d)\ |0|=0$

$e)\ -|3|=-3=-3$

$f)\ |-3|=3$

ونلخص هنا بعض خواص القيم المطلقة:

إذا كان (a) و (b) عددين حقيقين فإن:

$1)\ |-a|=|a|=a$

أي أن العدد وعكسه الجمعي لهما نفس القيمة المطلقة، مثال:

$$|-47|=|47|=47$$

$2)\ |ab|=|a||b|$

أي أن القيمة المطلقة لحاصل ضرب عددين يساوي حاصل ضرب القيمة المطلقة لكل عدد، فمثلا:

$$|(5)(7)| = |5||7| = (5)(7)=+35$$

و:

$$|(5)(-7)|=|5||-7|=(5)(7)=+35$$

$3)\ \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \quad , b\neq 0$

أي أن القيمة المطلقة لحاصل قسمة عددين يساوي القيمة المطلقة للعدد (a) مقسوما على القيمة المطلقة للعدد (b)، فمثلا:

$$\left|\frac{14}{7}\right|=\frac{|14|}{|7|}=\frac{(14)}{(7)}=+2$$

و:

$$\left|\frac{-14}{7}\right|=\frac{|-14|}{|7|}=\frac{14}{7}=+2$$

$4)\ |a+b|\leq |a|+|b|$

وهو ما نسميه بالمتباينة المثلثية، وتعنى أن القيمة المطلقة لمجموع عددين تكون دائما أصغر من أو تساوى مجموع القيمة المطلقة لكل عدد، وإثبات هذا كالآتي:

$$|a+b|^2 \leq (a+b)^2$$

$$\leq (a^2+2ab+b^2)$$

$$\leq a^2+2|a||b|+b^2$$

$$\leq (|a|+|b|)^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين؛

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

ونوضح هذا عدديا كالتالى:

$$|5+8| = |13| \leq |5|+|8| = (5)+(8) = +13$$

لاحظ أننا أجرينا عملية الجمع داخل خطي القيمة المطلقة أولا !

ومثال آخر:

$$|-5+8| = |3| \leq |-5|+|8| \leq (5)+(8) = +13$$

ولإيجاد فترات المتباينات ومجموعات الحل للقيم المطلقة يجب أن نلاحظ التالي:

إذا كانت (x) عدداً حقيقيا و (a) عددًا حقيقيا موجبا، فإن:

1) $|x|^2 = x^2$

فإذا كانت (x) موجبة، أي:

$$x \geq 0$$

فإن:

$$|x| = x$$

وبتربيع الطرفين:

$$|x|^2 = x^2$$

أما إذا كانت (x) سالبة، أي:

$$x < 0$$

فإن:

$$|x| = -x$$

وبتربيع الطرفين:

$$|x|^2 = (-x)^2 = x^2$$

2)

لإيجاد مجموعة الحل للمتباينة:

$$|x| < a$$

نربّع طرفي المتباينة، مع ملاحظة أن $(|x|^2 = x^2)$:

$$x^2 < a^2$$

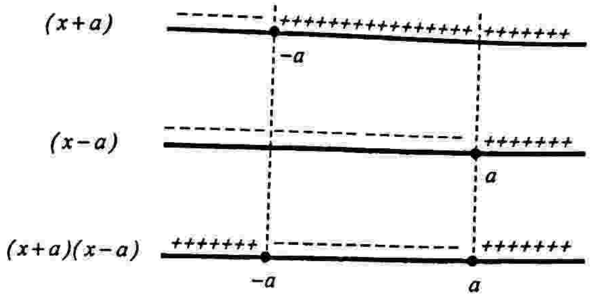
نجعل المتباينة صفرية، وذلك بنقل (a^2) للطرف الأيسر:

$$x^2 - a^2 < 0$$

وحيث أن الطرف الأيسر عبارة عن فرق مربعين، فإننا نكتبه كالتالي:

$$(x+a)(x-a) < 0$$

عند النقطتين $(-a)$ و (a) ينقسم خط الأعداد إلى ثلاث أجزاء، ولإيجاد فترة الحل يجب أن نلاحظ أن حاصل ضرب القوسين لابد أن يكون سالبا؛



أي أن مجموعة الحل يجب أن تكون في الفترة $(-a,a)$

أي أن:

$$-a<x<a$$

أو:

$$x\in\{x|-a<x<a\}$$

ونرسم الحل كالآتي:



3)

ولإيجاد مجموعة الحل للمتباينة:

$$|x|>a$$

نربّع الطرفين:

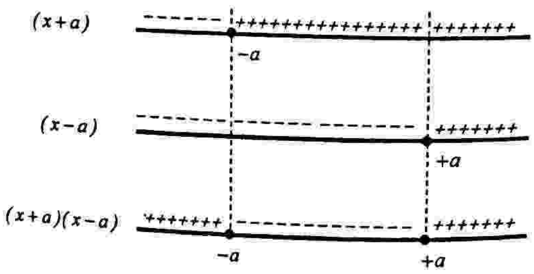
$$x^2>a^2$$

نجعل المتباينة صفرية:

$$x^2-a^2>0$$

$$(x+a)(x-a)>0$$

ونجد فترة الحل على خط الأعداد مع ملاحظة أن حاصل ضرب القوسين يجب أن يكون موجبا؛



أي أن مجموعة الحل هي إتحاد الفترتين: (a,∞) و $(-\infty,-a)$

أي:

$(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$

ونرسمها بيانيا كالتالى:



أي أن:

$x<-a$ و $x>a$

4)

ولإيجاد حل المتباينة:

$|x|\le a$

بنفس الطريقة السابقة نجد أن:

$-a\le x\le a$

مع ملاحظة أن $(-a)$ و (a) من ضمن مجموعة الحل، أي أن مجموعة الحل تكون في الفترة $[-a,a]$ ونرسمها بيانيا كالتالى:



أي أن:

$x\in\{x|-a\le x\le a\}$

5)

ولإيجاد حل المتباينة:

$x\ge a$

في هذه الحالة تكون:

$x\le -a$ و $x\ge a$

وتكون $(-a)$ و (a) من ضمن مجموعة الحل، وتكون مجموعة الحل هي:

$(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$

ونرسمها على خط الأعداد كالتالي:



مثـال (1.9): أوجد الحل للمتباينة:

$|x-7|<9$

الحـــــل:

هناك إحتمالان، الإحتمال الأول:

$x-7 \geq 0$

أي أن $(x-7)$ مقدار موجب أو يساوى صفرا.

بإضافة $(+7)$ لطرفي المتباينة؛

$$x-7+(+7) \geq 0+(+7)$$

$$x \geq 7 \qquad (1)$$

أي أن المتباينة تصبح:

$$x-7 < 9$$

أو:

$$x < 16 \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن جميع الأعداد بين العددين (7) و (16) تكون حلولا مع ملاحظة أن العدد (7) يكون من ضمن الحل، أي أن مجموعة الحل هي الفترة النصف مفتوحة $[7,16)$.

الإحتمال الثاني، أن تكون:

$$x-7<0$$

أي أن:

$$x < 7 \qquad (3)$$

أي أن $(x-7)$ مقدار سالب، فتكون:

$$|x-7| = -(x-7) = 7-x$$

وتصبح المتباينة:

$$x-7 < 9$$

أي أن:

$$-x < 2$$

وبالضرب في (-1)، مع تغيير إشارة المتباينة، نحصل على:

$$x > -2 \qquad (4)$$

من (3) و (4)، يكون مجموعة الحل للمتباينة $(-2,7)$.

فيكون الحل الكلي للمتباينة هو:

$$(-2,7) \cup [7,16)$$

أي أن الحل يكون الفترة المفتوحة $(-2,16)$، والتى نرسمها بيانيا كالتالي:



أي أن:

$x \in \{x | -2 < x < 16\}$

....

لقد أطلنا الشرح في المثال السابق لكي نقتنع بالحل، ولكن يمكن أن نحل المثال السابق بطريقة مختصرة [وهو ما سوف نتبعه في الأمثلة التالية]، وهذا الحل كالآتي:

$$|x-7|<9$$

$$-9<x-7<9$$

وبإضافة العدد $(+7)$ لكل أطراف المتباينة؛

$$-2 < x < 16$$

أي أن مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(-2,16)$، وهو نفس الحل السابق.

> لاحظ أن العدد (7) يقع بالضبط في منتصف المسافة على خط الأعداد بين (-2) و (16) ، ولاحظ أن العدد (7) ناتج من حل المعادلة:
>
> $$x-7=0$$

مثـال (1.10): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$|5x-4|\le 11$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة كالتالي:

$$-11\le 5x-4 \le 11$$

بإضافة العدد (4) لكل أطراف المتباينة؛

$$-7\le 5x\le 15$$

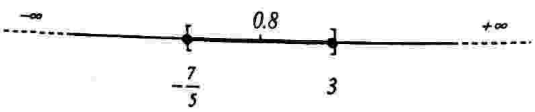
نقسم أطراف المتباينة على معامل (x) وهو (5)؛

$$-\frac{7}{5}\le x\le 3$$

أي أن مجموعة الحل هي الفترة المغلقة $[-\frac{7}{5},3]$، أي أن:

$$x\in[-\frac{7}{5},3]$$

ونرسم الحل بيانيا كالتالي:



لاحظ أن العدد (0.8) [وهو العدد الناتج عن حل المعادلة $(5x-4=0)$] يقع بالضبط في منتصف المسافة على خط الأعداد بين العددين (3) و $(-\frac{7}{5})$.

مثال (1.11): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$|x-9|>9$$

الحل:

لاحظ الإختلاف في إشارة المتباينة في هذا المثال والمثال (1.9). نكتب المتباينة كالتالي:

$$-9>x-7>9$$

نضيف العدد (7) إلى أطراف المتباينة؛

$$-2>x>16$$

أي أن:

$$x>16$$

فتكون مجموعة الحل:

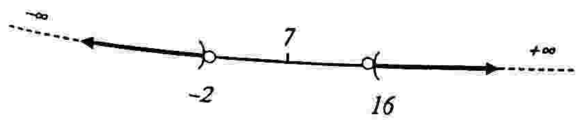
$$(16,\infty)$$

و:

$$x<-2$$

فتكون مجموعة الحل: $(-\infty,-2)$

ونمثل فترتي الحل بيانيا على خط الأعداد كالتالي:



أي أن مجموعة الحل هو إتحاد الفترتين؛ أي:

$$(-\infty,-2)\cup(16,\infty)$$

مثال (1.12): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|<4$$

الحل:

نلاحظ أولا أن $(x=-1)$. لا يمكن أن تكون ضمن الحل ! "لماذا؟"

نربع طرفي المتباينة:

$$\frac{(2x-1)^2}{(x+1)^2}<16$$

نضرب طرفي المتباينة في المقام $(x+1)^2$؛

$$(2x-1)^2 < 16(x+1)^2$$

$$4x^2-4x+1 < 16(x^2+2x+1)$$

$$4x^2-4x+1 < 16x^2+32x+16)$$

نجعل المتباينة صفرية؛

$$-12x^2-36x-15 < 0$$

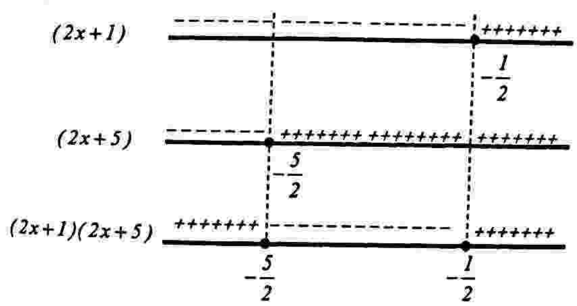
وبالقسمة على (-3) وتغيير إشارة المتباينة – حيث إننا نقسم على عدد سالب – نحصل على:

$$4x^2+12x+5 > 0$$

نحلل المتباينة إلى حاصل ضرب قوسين؛

$$(2x+1)(2x+5) > 0$$

نلاحظ أن جذري المتباينة هما العددان $(-\frac{1}{2})$ و $(-\frac{5}{2})$، ونلاحظ أن حاصل ضرب القوسين لابد أن يكون موجبا، ونستعين بخط الأعداد لإيجاد إشارة القوسين؛



أي أن مجموعة الحل هو إتحاد الفترتين:

$(-\infty,-\frac{5}{2})$ و $(-\frac{1}{2},\infty)$، أي أن مجموعة الحل هي:

$$x\in(-\infty,-\frac{5}{2})\cup(-\frac{1}{2},\infty) - \{1\}$$

حيث إستثنينا العدد (1) من مجموعة الحل، لأنه كما أسلفنا ليس من مجموعة الحل!.

أمثلة متنوعة (1)

مثال (1): أوجد كل المجموعات الجزئية المحتملة للمجموعات التالية:

أ- $A=\{4,7\}$

ب- $B=\{a,b,c\}$

الحـــــل:

أ- يوجد (4) مجموعات جزئية هي:

$\phi,\{4\},\{7\},\{4,7\}$

ب- يوجد (8) مجموعات جزئية:

$\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

مثال (2): إذا كانت:

$A=\{d,e,f\}$

أي العبارات التالية صحيحة، وأيها خطأ، وأذكر السبب:

أ- $d \in A$ ، ب- $e \subseteq A$

جـ- $\{d\} \in A$ ، د- $\{f\} \subseteq A$

الحـــــل:

أ - صحيحة، لأنها تعبر عن أن العنصر (d) عنصر في المجموعة (A).

ب- خطأ، لأن الرمز $\subseteq$ يعبر عن علاقة بين مجموعتين، وليس بين عنصر ومجموعة.

جـ- خطأ، لأن الرمز $\in$ يعبر عن علاقة بين عنصر ومجموعة، والصحيح أن $\{d\}$ هي مجموعة جزئية من المجموعة (A)، *وليست عنصرا في المجموعة* (A).

د - صحيحة، لأن المجموعة $\{f\}$ مجموعة جزئية من المجموعة (A).

مثال (3): إذا كانت:

$A = \{1,2,3,5,7\}$ و $B = \{1,2,3,4\}$

وكانت المجموعة الشاملة U هي:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

أوجد:

أ - A^c ، ب- B^c

جـ- $A \cap B$ ، د - $A \cup B$

الحـــــل:

أ - A^c تحتوي على كل العناصر في المجموعة U بإستثناء العناصر الموجودة في المجموعة A أي أن:

$A^c = \{4,6,8,9,10\}$

ب- B^c تحتوي على كل العناصر في المجموعة U بإستثناء العناصر الموجودة في المجموعة B، أي أن:

$B^c = \{5,6,7,8,9,10\}$

جـ - $A \cap B$، هي المجموعة التي تحتوى على العناصر الموجودة في A وموجودة أيضا في B، أي أن:

$A \cap B = \{1,2,3\}$

د - $A \cup B$، هي المجموعة التي تحتوى على العناصر الموجودة في المجموعتين، أي أن:

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$

مثـال (4): أرسم الفترات التالية:

أ - $(3,\infty)$ ، ب- $(-\infty,-2]$

جـ - $(-8,-1)$ ، د - $[-2,2)$

الحـــــل:

أ -



ب-



جـ -



د -



مثـال (5): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$-2<5+3x<20$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$-2<5+3x<20$$

نطرح العدد (5) من أطراف المتباينة؛

$$-7<3x<15$$

نقسم على معامل على (x) وهو (3) ؛

$$-\frac{7}{3}<x<5$$

أي أن:

$$x\in\{x\mid-\frac{7}{3}<x<5\}$$

أي أن مجموعة الحل هي الفترة $(-\frac{7}{3},5)$، ونرسمها بيانيا كالتالي:



مثـال (6): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$x^2+4x>-3$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$x^2+4x>-3$$

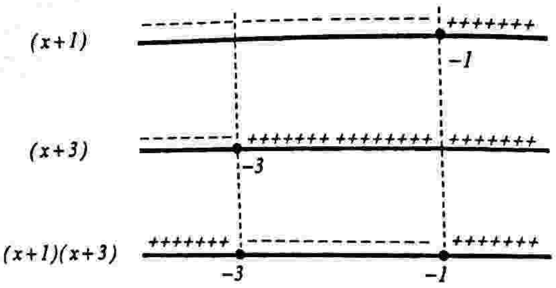
نجعل المتباينة صفرية؛

$$x^2+4x+3>0$$

نحلل الطرف الأيسر إلى حاصل ضرب قوسين:

$$(x+1)(x+3)>0$$

أي أن جذري المتباينة (-1) و (-3) ، مع ملاحظة أن حاصل ضرب القوسين يجب أن يكون موجبا. ونستخدم خط الأعداد لإيجاد الفترة أو الفترات الصحيحة كالتالي:



أي أن مجموعة الحل هي التي يكون فيها حاصل ضرب القوسين موجبا، أي الفترتان $(-\infty,-3)$ و $(-1,+\infty)$. لاحظ أن (-1) و (-3) ليستا من ضمن الحل. ونرسمها بيانيا كالتالي:



مثـال (7): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

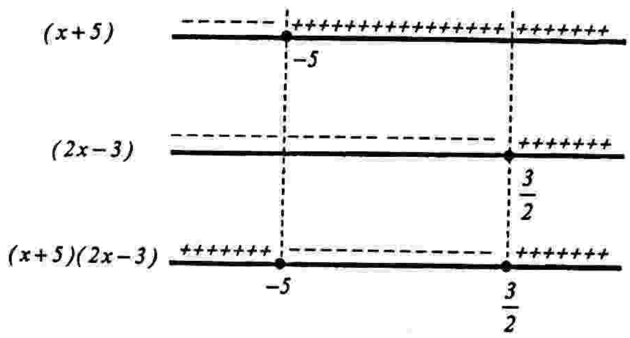
$$(x+5)(2x-3)\le 0$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$(x+5)(2x-3)\le 0$$

أي أن جذري المتباينة (-5) و $(\frac{3}{2})$،وحاصل ضرب القوسين إما أن يكون سالبا أو صفرا، ونجد الفترة الصحيحة من خط الأعداد كالتالي:



أي أن مجموعة الحل تقع في الفترة المغلقة $[-5,\frac{3}{2}]$، ونرسمها بيانيا كالتالي:



مثـال (8): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$\frac{1}{x-2}<\frac{1}{3}$$

الحـــــــل:

نكتب المتباينة:

$$\frac{1}{x-2}<\frac{1}{3}$$

نضرب طرفي المتباينة في مربع مقام الطرف الأيسر:

$$(x-2)^2\frac{1}{(x-2)}<\frac{1}{3}(x-2)^2 \quad , \quad x\neq 2$$

$$(x-2)<\frac{1}{3}(x^2-4x+4)$$

نجعل المتباينة صفرية كالتالي:

$$3(x-2)<x^2-4x+4$$

$$3x-6<x^2-4x+4$$

$$-x^2+7x-10<0$$

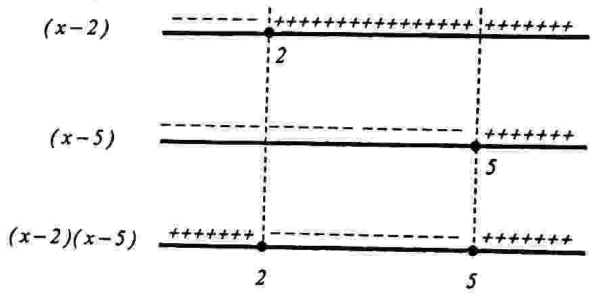
نضرب المتباينة في (-1) ونعكس إشارة المتباينة؛

$$x^2-7x+10>0$$

نحلل المتباينة إلى حاصل ضرب قوسين؛

$$(x-2)(x-5)>0$$

أي أن حاصل ضرب المتباينة يجب أن يكون موجبا. وحيث أن جذري المتباينة هما (2) و (5)، فإننا نجد فترة الحل من خط الأعداد كالتالي:



أي أن مجموعة الحل تقع في: $(5,\infty)$ و $(-\infty,2)$، ونرسم الحل على خط الأعداد كالتالي:



لاحظ أن العددين (2) و (5) ليسا من ضمن الحل!

مثال (9): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$|2-7x|-1>4$$

الحـــــل:

نكتب المتباينة:

$$|2-7x|-1>4$$

نضيف $(+1)$ للطرفين؛

$$|2-7x|>5$$

أي أن:

$$-5>2-7x>5$$

نضيف (-2) لكل أطراف المتباينة؛

$$-7>-7x>3$$

نقسم أطراف المتباينة على معامل (x) وهو (-7) ونعكس إشارة المتباينة؛

$$1<x<-\frac{3}{7}$$

أي أن مجموعة الحل هي: $(1,\infty)$ و $(-\infty,-\frac{3}{7})$. أي أن: مجموعة الحل هي:

$$(-\infty,-\frac{3}{7})\cup(1,\infty)$$

ونرسمها بيانيا كالتالي:



لاحظ أن (1) و $(-\frac{3}{7})$ ليست من ضمن الحل!

مثال (10): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$\left|\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{6}$$

الحـــل:

نكتب المتباينة:

$$\left|\frac{4x+3}{6}\right|\le\frac{1}{6}$$

أي:

$$-\frac{1}{6}\le\frac{4x+3}{6}\le\frac{1}{6}$$

بضرب أطراف المتباينة في (6)؛

$$-1\le 4x+3\le 1$$

نضيف (-3) لأطراف المتباينة ؛

$$-4\le 4x\le -2$$

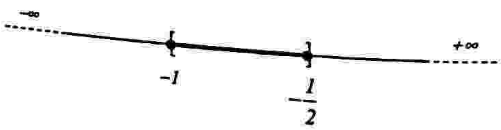
بقسمة أطراف المتباينة على معامل (x)؛

$$-1\le x\le -\frac{1}{2}$$

أي أن مجموعة الحل هي:

$$[-1,-\frac{1}{2}]$$

ونرسمها بيانيا كالتالي:



لاحظ أن (-1) و $(-\frac{1}{2})$ من ضمن الحل!

مسائل (1)

مسألة (1): إذا كانت:

$A = \{1,3,4,5,9\}$ و $B = \{2,4,6,7,8\}$

وكانت المجموعة الشاملة U هي:

$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

أوجد:

a) A^c , b) $(A \cap B)^c$, c) $A^c \cup B^c$

مسألة (2): أوجد الفترات للمتباينات التالية، ومثلها بيانيا على خط الأعداد:

a) $1 \le x \le 7$, b) $-2 < x \le 0$
c) $x > 4$, d) $x \le 3$

مسألة (3): أكتب الفترات التالية كمتباينات:

a) $[1,4)$, b) $(2,\infty)$
c) $[2,3]$, d) $(-\infty,-9]$

مسألة (4): أرسم الفترات التالية على خط الأعداد، وهل هي فترات مفتوحة، أم مغلقة أو نصف مفتوحة، أو لانهائية:

a) $(0,5)$, b) $(0,5]$
c) $[-3,4]$, d) $(-\infty,\frac{1}{2}]$

مسألة (5): أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية:

a) $-5x < -2$, b) $4x-2 \ge 0$
c) $\frac{1}{x} < 2$

مسألة (6): أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد:

a) $-3 < x+2 \le 0$

b) $\frac{x-2}{x+1} > 0$

مسألة (7): أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد:

a) $\frac{5}{8-2x}>0$, b) $2x^2+9x+4\geq 0$

c) $\frac{1}{x^2}<100$, d) $\frac{5}{8-2x}>0$

مسألة (8): أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية، ومثلها بيانيا:

a) $x^2<2$, b) $x^2-x+<0$

مسألة (9): أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية:

a) $|x-2|<3$, b) $|x-2|>3$

c) $|x+1|\leq 2$

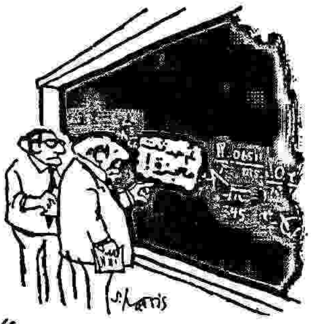
مسألة (10): أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية:

a) $\left|5-\frac{2}{x}\right|<1$, b) $\left|\frac{2x-4}{3}\right|<4$

c) $\left|\frac{1-3x}{2}\right|\leq 7$

مسألة (11): أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

$$\frac{|x+1|}{|x|}\leq 1$$



أعتقد أن الخطوة الثانية تحتاج الى توضيح أكثر...

إجابات (1)

1-a) $A^c = \{0,2,6,7,8\}$

1-b) $(A \cap B)^c = \{0,1,2,3,5,6,7,8,9\}$

1-c) $A^c \cup B^c = \{0,1,2,3,5,6,7,8,9\}$

2-a)

فترة مغلقة: $[1,7]$



2-b)

فترة نصف مفتوحة: $(-2,0]$



2-c)

فترة لا نهائية: $(4,\infty)$



2-d) فترة لا نهائية: $(-\infty,3]$



3-a) $1 \le x < 4$

3-b) $x > 2$

3-c) $2 \le x \le 3$

3-d) $x \le -9$

4-a)



فترة مفتوحة.

4-b)



فترة نصف مفتوحة.

4-c)



فترة مغلقة.

2-d) 

$\frac{1}{2}$ فترة لا نهائية.

5-a) $(\frac{2}{5},\infty)$

5-b) $[\frac{1}{2},\infty)$

5-c) $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{2},\infty)$

6-a) $(-5,-2]$

6-b) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

7-a) $(-\infty,4)$

7-b) $(-\infty,-4]\cup[-\frac{1}{2},\infty)$

7-c) $(-\infty,-\frac{1}{10})\cup(\frac{1}{10},\infty)$

8-a) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

8-b) $(0,1)$

9-a) $(-1,5)$

9-b) $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$

9-c) $[-3,1]$

10-a) $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$

10-b) $(-4,8)$

10-c) $(-\frac{13}{3},5)$

11- $(-\infty,-\frac{1}{2})$

2

الدوال

Functions

(2.1) الدالة (function)

الدالة هي علاقة بين مجموعتين من الأعداد، أو قاعدة تبين كيف تعتمد كمية على كمية أخرى.

فمثلا، مساحة الدائرة "وهي عدد" لها علاقة بطول نصف قطر الدائرة "وهو عدد"، فكلما زاد طول نصف القطر زادت مساحة الدائرة، بمعنى أن مساحة الدائرة "دالة" في نصف القطر. أيضا، حجم الجسم "دالة" في درجة الحرارة، فكلما زادت درجة الحرارة زاد حجم الجسم. أيضا، عندما يسقط جسم من إرتفاع معين فإن المسافة المقطوعة تكون "دالة" في الزمن.

فالدالة إذن هي علاقة بين مجموعتين من الإعداد: المجموعة (x) والمجموعة (y)، وهذا يعني أنه عندما تتغير (x) تتغير (y) تبعا لذلك، وتسمى (x) بالمتغير المستقل، و (y) بالمتغر التابع.

تُكتب الدالة رياضيا كالتالي:

$f(x)$ ، وتُقرأ $(f \text{ of } x)$

وهي تعني قيمة $(f(x))$ عند المقدار (x). فمثلا، إذا كانت:

$$y=f(x)=2x$$

فإن $f(x)$ تكون عند $(x=5)$ هي:

$$y=f(5)=2(5)=10$$

بمعنى أن قيمة الدالة $f(x)$ عندما تكون $(x=5)$ هي (10):

ومثلا، إذا كانت:

$$y=f(x)=3x-11$$

عند $(x=-2)$، تكون قيمة الدالة:

$$f(-2)=3(-2)-11=-6-11=-17$$

أي أن قيمة الدالة عندما تكون $(x=-2)$ هو (−17).

مثـــــال (2.1): أوجد $f(x)$ للحالات التالية:

(a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ at $(x=4)$

(b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ at $(x=-1)$

(c) $f(x)=2x^2-3x+4$ at $(x=-2)$

الحـــــل:

(a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}=\sqrt{(4)^2-9}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

(b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=\dfrac{-1}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

(c) $f(x)=2x^2-3x+4=2(-2)^2-3(-2)+4=2(4)+6+4=18$

(2.2) نطاق الدالة (Function Domain)
ومدى الدالة (Function Range)

نعرف الدالة مرة أخرى بطريقة مغايرة قليلا كالتالي:

الدالة هي توافق بين مجموعتين، المجموعة الأولى (A) وتسمى بالنطاق، والمجموعة الثانية (B) وتسمى بالمدى، على أن يتوافق كل عنصر في النطاق مع عنصر وحيد فقط في المدى. أي أنه إذا توافق عنصران أو أكثر في المدى مع عنصر في النطاق فإن هذا لا يمثل دالة.

أي أننا إذا وجدنا الحل لمعادلة تربط بين المتغيرين(x) و (y)، وكان الحل قيمة وحيدة فقط للمتغير (y)، فإنه في هذه الحالة تكون (y) دالة في (x). ونوضح هذا بالمثال التالي:

مثـــــال (2.2): أي من الحالات التالية تكون فيها (y) دالة في (x):

$(a)\quad x+y=25$

$(b)\quad x^2+y^2=25$

$(c)\quad x^2+y=25$

$(d)\quad x=y^2$

الحـــــــــل:

نجد الحل لكل معادلة. فإذا كان هناك قيمتان أو أكثر لـ (y) لقيمة معينة لـ (x)، فإن المعادلة ليست دالة.

$(a)\quad x+y=25$

$$y=25-x$$

في هذه الحالة نرى أن أي قيمة للمتغير المستقل (x) توافق قيمة واحدة للمتغير التابع (y). فمثلاً، إذا كانت $(x=1)$ فإن:

$$y=25-(1)=24$$

أي أن هذه المعادلة تعرّف (y) كدالة في (x).

$(b)\quad x^2+y^2=25$

$$y^2=25-x^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين؛

$$y=\pm\sqrt{25-x^2}$$

في هذه الحالة نرى أن للمدى (y) قيمتان في النطاق (x)، وهذا يجعل **المعادلة لا تمثل دالة**. فمثلا إذا كانت $(x=3)$ فإن:

$$y=\pm\sqrt{25-(3)^2}=\pm\sqrt{16}=\pm4$$

$(c)\quad x^2+y=25$

$$y=25-x^2$$

في هذه الحالة نجد أن لكل قيمة للنطاق (x) توجد قيمة واحدة في المدى (y). فمثلا إذا كانت $(x=-2)$ فإن:

$$y=25-(-2)^2=25+4=29$$

أي أن هذه المعادلة تمثل دالة.

$(c)\quad x=y^2$

$$y^2=x$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين؛

$$y=\pm\sqrt{x}$$

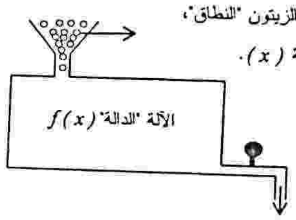
أي أنه توجد قيمتان للمتغير التابع (y) لكل قيمة للمتغيرالمستقل (x) مما يجعل **المعادلة ليست دالة**. فمثلا، إذا كانت $(x=49)$ فإن:

$$y=\pm\sqrt{49}=\pm7$$

•••••••••••

نعود إلى تعريف الدالة ونطاقها ومداها بطريقة غير رياضية، فلو تخيلنا أن الدالة عبارة عن آلة تشتغل حسب آلية معينة، حيث تدخل المواد الخام من جهة لتخرج من الجهة الأخرى مواد مصنعة.

فلو كانت هذه الآلة آلة لعصر الزيتون، فإننا ندخل حبوب الزيون من جهة في الآلة لتخرج من الجهة الأخرى زيتا. أى أن نطاق الآلة "الدالة" في هذه الحالة هو حبوب الزيتون، ومدى الآلة "الدالة" هو الزيت، كما هو موضح في شكل (2.1).

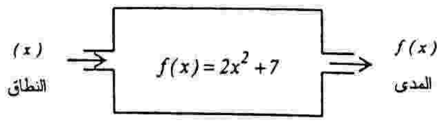


شكل (2.1).

ولكن في أغلب الأحيان نعبر عن الدالة بمعادلة رياضية تبين علاقة $(f(x))$ بالمتغير المستقل (x) مثل:

$$f(x) = 2x^2 + 7$$

فإذا تخيلنا أن هناك آلة "دالة" كما في شكل (2.2) مهمتها أنه في كل مرة يدخل فيها مقدار للمتغير (x) من جهة، فإنها تربعه أولا، ثم تضربه في العدد (2)، وتضيف للناتج العدد (7)، وتخرج الناتج النهائي من الجهة الأخرى.



شكل (2.2).

•••••••••••

في الأمثلة المتنوعة التالية نوضح كيف نجد نطاق الدالة ومدي الدالة:

مثـــــال (2.3): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y = f(x) = x^2$$

الحـــــــل:

نطاق الدالة [والذي نرمز له بالحرف (D)] هو كل الأعداد الحقيقية سواء كانت سالبة أو موجبة بما فيها الصفر، أي أن المتغير (x) يكون بين $(-\infty)$ و $(+\infty)$، أي أن نطاق الدالة هو الفترة اللانهائية $(-\infty, +\infty)$، أي:

$$D=\Re$$

أما مدى الدالة [والذي نرمز له بالحرف (R)] فهو في هذه الحالة ناتج عن تربيع المتغير (x)، وبالتالي يكون الناتج، أي$(f(x))$ دائما موجبا أو صفرا، سواء كانت (x)سالبة أو موجبة. أي أن مدى الدالة هو الأعداد الحقيقية الموجبة فقط بما فيها الصفر، أي أن مدى الدالة هو الفترة اللانهائية $[0,\infty)$، أي:

$$R=[0,\infty)$$

مثـــال (2.4): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y=f(x)=2x-5$$

إذا كانت:

$$1\le x\le 7$$

الحـــل:

حيث أن (x) لا يمكن أن تكون أصغر من العدد (1) ولا أن تكون أكبر من العدد (7)، فإن نطاق الدالة يكون الفترة المغلقة $[1,7]$، أي:

$$D=[1,7]$$

ولإيجاد مدى الدالة نعوض في المعادلة عن(x) بأصغر قيمة لنجد أصغر قيمة للمدى، وبأكبر قيمة لنجد أكبر قيمة للمدى، أي:

$$f(1)=2(1)-5=2-5=-3$$

$$f(7)=2(7)-5=14-5=9$$

أي أن مدى الدالة يكون بين العددين الحقيقين (-3) و (9)، أي الفترة المغلقة $[-3,9]$، أي أن:

$$R=[-3,9]$$

مثـــال (2.5): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

الحـــل:

لو كانت (x) سالبة، فإن الجذر التربيعي لها لن يكون عدداً حقيقياً، وبالتالي تُستبعد كل الإعداد الحقيقية السالبة، أي أن نطاق الدالة يكون جميع الأعداد الحقيقية الموجبة بما فيها الصفر، أي أن نطاق الدالة يكون الفترة اللانهائية $[0,+\infty)$، أي أن:

$$D=[0,+\infty)$$

أما مدى الدالة فإنه الجذر التربيعي لكل الأعداد الحقيقية الموجبة بما فيها الصفر، أي أن مدى الدالة أيضا الفترة اللانهائية $[0,+\infty)$، أي أن:

$$R=[0,+\infty)$$

مثـــــال (2.6): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y=f(x)=\sqrt{9-x}$$

الحـــــل:

لكي تكون $(f(x))$ عددا حقيقيا لابد أن يكون العدد الذى تحت الجذر عدداً موجبا، أي أن (x) لابد أن تكون أصغر من أو تساوى (9)، أي أن نطاق الدالة يكون الفترة اللانهائية $(-\infty,9]$، أي أن:

$$D=(-\infty,9]$$

ويكون مدى الدالة بين أقل قيمة للدالة $(f(x))$ وهي عندما تكون $(x=9)$، أي:

$$f(9)=\sqrt{9-9}=0$$

وبين موجب $(+\infty)$، أي أن مدى الدالة هو الفترة اللانهائية $[0,+\infty)$، أي أن:

$$R=[0,+\infty)$$

مثـــال (2.7): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y=f(x)=3x-15$$

الحـــــل:

نطاق الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، لأنه لا يوجد أي مانع في أن تكون (x) أى عدد، أي أن نطاق الدالة هو $(-\infty,+\infty)$، أي:

$$D=\Re$$

وكذلك مدى الدالة:

$$R=\Re$$

مثـــال (2.8): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y=f(x)=\sqrt{2x-3}$$

الحـــــل:

لكي تكون $(f(x))$ عدداً حقيقيا لابد أن تكون قيمة العدد الذى تحت الجذر أكبر من أو يساوي صفرا، أي أن:

$$2x-3\ge 0$$

$$2x \ge 3$$

$$x \ge \frac{3}{2}$$

أي أن نطاق الدالة يكون بين $\frac{3}{2}$ وموجب ما لا نهاية، أي أن:

$$D = [\frac{3}{2}, \infty)$$

ومدى الدالة يكون بين أقل قيمة للدالة ($f(x)$)، وهى عندما تكون ($x = \frac{3}{2}$)، وأكبر قيمة للدالة ($f(x)$)، وهى موجب لا نهاية، أي أن:

$$R = [0, +\infty)$$

مثـــــال (2.9): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y = f(x) = \sqrt{4 - 9x^2}$$

الحـــــل:

لا بد أن تكون ($4 - 9x^2 \ge 0$) حتى تكون قيمة الجذر عدداً حقيقيا، أي ($f(x)$) عدداً حقيقيا، أي أن:

$$(4 - 9x^2) = (2 - 3x)(2 + 3x) \ge 0$$

أي، إما:

$$2 - 3x \ge 0$$

$$-3x \ge -2$$

وبالقسمة على معامل (x) وهو (-3) مع تغيير إشارة المتباينة؛

$$x \le \frac{2}{3}$$

أو:

$$2 + 3x \ge 0$$

$$3x \ge -2$$

$$x \ge -\frac{2}{3}$$

أى أن نطاق الدالة هو:

$$D = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$$

ويكون مدى الدالة هو أصغر قيمة للدالة [وهى عندما تكون ($x = \pm\frac{3}{2}$)، والتى تكون صفرا] وأكبر قيمة للدالة [والتى تكون عندما تكون ($x = 0$) والتى تكون ($\sqrt{4}$)]، أي أن مدى الدالة هو:

$$R = [0, 2]$$

مثـــــال (2.10): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y = f(x) = 4$$

الحـــــــل:

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية أى الفترة $(-\infty,+\infty)$، أى:

$$D = \Re$$

ومدى الدالة يكون العدد (4)، أي:

$$R = 4$$

مثـــــال (2.11): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y = f(x) = \frac{1}{2x-3}$$

الحـــــــل:

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية $(\Re)$، ما عدا عندما يكون المقام يساوى صفراء، أى عندما تكون $(2x-3=0)$، أى عندما تكون $(x=\frac{3}{2})$، أى أن نطاق الدالة هو:

$$D=(-\infty,\frac{3}{2})U(\frac{3}{2},+\infty)$$

والذى يمكن أن نكتبه بصيغة أخرى هي:

$$D=\Re\backslash\{\frac{3}{2}\}$$

أي كل الأعداد الحقيقية ماعدا العدد $(\frac{3}{2})$.

لإيجاد مدى الدالة في هذه الحالة، نعرّف (x) بدلالة (y) كالتالي:

$$y=\frac{1}{2x-3}$$

وبضرب الوسطين في الطرفين؛

$$y(2x-3)=1$$

$$2yx-3y=1$$

$$2yx=1+3y$$

أو:

$$x=\frac{1+3y}{2y}$$

أي أن مدى الدالة هو كل الأعداد الحقيقية $(\Re)$، ما عدا عندما تكون $(y=0)$، أى أن مدى الدالة:

$$R=(-\infty,0)U(0,+\infty)$$

أو:

$$R = \Re \setminus \{0\}$$

أي أن مدى الدالة كل الأعداد الحقيقية ما عدا العدد صفر.

مثـــــال (2.12): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y = f(x) = \frac{x}{3x-5}$$

الحـــــــل:

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية ($\Re$)، ما عدا عندما يكون المقام يساوى صفرا، أى عندما تكون ($x = \frac{5}{3}$).

أى أن نطاق الدالة:

$$D = (-\infty, \frac{5}{3}) U (\frac{5}{3}, +\infty)$$

أو:

$$D = \Re \setminus \{\frac{5}{3}\}$$

لإيجاد مدى الدالة نعبر عن (x) بدلالة (y) كالتالي:

$$y = \frac{x}{3x-5}$$

وبضرب الوسطين في الطرفين؛

$$y(3x-5) = x$$

$$3yx - 5y = x$$

أو:

$$3yx - x = 5y$$

وبأخذ (x) عامل مشترك؛

$$x(3y-1) = 5y$$

أو:

$$x = \frac{5y}{3y-1}$$

فيكون مدى الدالة هو كل الأعداد الحقيقية ($\Re$)، ما عدا عندما يكون المقام يساوى صفرا، أى عندما تكون ($y = \frac{1}{3}$).

أى أن مدى الدالة:

$$R = (-\infty, \frac{1}{3}) U (\frac{1}{3}, +\infty)$$

أو:

$$R = \Re \setminus \{\frac{1}{3}\}$$

مثـــال (2.13): أوجد نطاق ومدى الدالة:

$$y = f(x) = \frac{x}{|x|}$$

الحـــــل:

نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية $(\Re)$، ما عدا عندما تكون $(x=0)$، أي أن:

$$D = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$

أو:

$$D = \Re \setminus \{0\}$$

أما مدى الدالة فنجده كالآتي:

نربع طرفي المعادلة؛

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$y = \pm 1$$

أي أن مدى الدالة:

$$R = (-1,1)$$

(2.3) بعض أنواع الدوال (Some Types of Functions)

1. الدالة العكسية (inverse Function)

نعرف أن هناك دالة تحول درجات الحرارة المئوية إلى درجات الحرارة على التدريج الفهرنهايتي، وهي:

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \qquad , x > -273$$

حيث (x) درجة الحرارة على التدريج المئوي.

وهناك دالة أخرى $(g(y))$ تحول درجة الحرارة على التدريج الفهرنهايتي إلى درجة الحرارة على التدريج المئوي، وهي:

$$g(y) = \frac{5}{9}(y - 32)$$

حيث (y) درجة الحرارة على التدريج الفهرنهايتي. فيُقال عن الدالة $(g(y))$ بأنها الدالة العكسية للدالة $(f(y))$.

فالدالة التي تعكس عمل الدالة (f) تُسمى بالدالة العكسية، ويُرمز لها بالرمز (f^{-1}).

....

ونلخص الطريقة لإيجاد الدالة العكسية (f^{-1}) من الدالة (f) كالتالي:

أ- حل المعادلة $(y=f(x))$ للمتغير (x)، أي أوجد $(x=f^{-1}(y))$.

ب- ضع (x) مكان (y)، و(y) مكان (x) لتحصل على $(y=f^{-1}(x))$، وذلك للتعبير عن الدالة بالطريقة المصطلح عليها، وهي أن (x) المتغير المستقل و(y) المتغير التابع.

> ملاحظة مهمة:
>
> نلاحظ أن نطاق الدالة العكسية (f^{-1}) هو مدى الدالة (f) ومدى الدالة العكسية (f^{-1}) هو نطاق الدالة (f)، أي أن:
>
> $$D_{f^{-1}} = R_f$$
> $$R_{f^{-1}} = D_f$$

وسنوضح ما قلنا بأكثر من مثال.

مثـــال (2.14): أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x+1$$

الحــــل:

نضرب طرفي المعادلة في العدد (2)، وذلك للتخلص من الكسر؛

$$2y=x+2$$

ونجد:

$$x=2y-2$$

نستبدل (x) بـ (y)، و(y) بـ (x) في المعادلة الأخيرة [لا لشيئ، وإنما ليتمشى مع المصطلح العام، وهي أن (y) المتغير التابع، و(x) المتغير المستقل]، أي:

$$y=2x-2$$

أي أن الدالة العكسية:

$$y=f^{-1}(x)=2x-2$$

مثـــــال (2.15): أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$y = f(x) = x^2 - 3$$

الحـــــل:

$$y = x^2 - 3$$

$$x^2 = y + 3$$

وباستبدال (x) بـ (y)، و (y) بـ (x)؛

$$y^2 = x + 3$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$y = \sqrt{x+3}$$

أي أن:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}$$

مثـــــال (2.16): أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-2} \quad , \quad x \neq 2$$

وأوجد نطاق ومدى الدالة العكسية.

الحـــــل:

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-2} \quad , \quad x \neq 2 \qquad (1)$$

بضرب الوسطين في الطرفين؛

$$y(x-2) = x+3$$

$$yx - 2y = x + 3$$

$$yx - x = 2y + 3$$

$$x(y-1) = 2y + 3$$

أو:

$$x = \frac{2y+3}{y-1} \qquad (2)$$

وباستبدال (x) بـ (y)، و (y) بـ (x) نجد الدالة العكسية؛

$$y = f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1} \quad , \quad x \neq 1 \qquad (3)$$

فيكون نطاق الدالة العكسية (f^{-1}) من المعادلة (3) هو:

$$D_{f^{-1}} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

ونجد مدى الدالة (f) من المعادلة (2) هو:

$$R_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

أي أن نطاق الدالة العكسية (f^{-1}) يساوي مدى الدالة (f)، أي:

$$D_{f^{-1}} = R_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

ونجد مدى الدالة العكسية (f^{-1}) من المعادلة (1)، وهو:

$$R_{f^{-1}} = (-\infty,2)U(2,+\infty)$$

ونجد نطاق الدالة (f) من المعادلة (1) هو:

$$D_f = (-\infty,2)U(2,+\infty)$$

أي أن:

$$R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty,2)U(2,+\infty)$$

مثـــال (2.17): أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$y = f(x) = \sqrt{2x+1} \quad , \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

وأوجد نطاق ومدى الدالة العكسية.

الحـــل:

$$y = f(x) = \sqrt{2x+1} \quad , \quad x \geq -\frac{1}{2} \qquad (1)$$

نربع الطرفين؛

$$y^2 = 2x+1$$

$$2x = y^2 - 1$$

أي أن:

$$x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

باستبدال (x) بـ (y)، و(y) بـ (x)؛

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

أي أن:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \qquad (3)$$

من المعادلة (1) نستنتج أن نطاق الدالة (f) هو:

$$D_f = [-\frac{1}{2},+\infty)$$

ومن المعادلة (3) نستنتج أن مدى الدالة (f^{-1}) هو:

$$D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2},+\infty)$$

أي أن:

$$D_f = R_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2},+\infty)$$

أما مدى الدالة (f) فهو من المعادلة (1):

$$R_f = [0,+\infty)$$

ونطاق الدالة (f^{-1}) من المعادلة (3) هو:

$$D_{f^{-1}} = [0,+\infty)$$

أي أن:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0,+\infty)$$

مثـــال (2.18): أوجد الدالة العكسية للدالة:

$$y = f(x) = 4x-7$$

وأوجد نطاق ومدى الدالة العكسية.

الحـــــــل:

$$y = 4x-7$$

$$4x = y+7$$

$$x = \frac{y+7}{4}$$

بإستبدال (x) بـ (y)، و (y) بـ (x)؛

$$y = \frac{x+7}{4}$$

أي أن:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+7}{4}$$

نطاق الدالة (f) هو كل الأعداد الحقيقية وكذلك مدى الدالة (f) هو كل الأعداد الحقيقية، أي أن:

$$D_f = (-\infty,+\infty) \quad , \quad R_f = (-\infty,+\infty)$$

وبالتالى يكون:

$$R_{f^{-1}} = (-\infty,+\infty) \quad , \quad D_{f^{-1}} = (-\infty,+\infty)$$

2. الدوال الزوجية والفردية (Even and Odd Functions)

تكون الدالة زوجية إذا كانت:

$$f(-x) = f(x)$$

لكل قيم (x) في نطاق الدالة $(f(x))$. فمثلا لإختبار الدالة:

$$f(x) = 2x^2$$

عما إذا كانت زوجية، فإننا نضع $(-x)$ مكان (x)؛

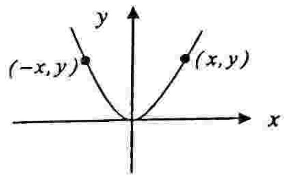
$$f(-x) = 2(-x)^2$$
$$= 2x^2$$

أي أن:

$$f(-x) = f(x)$$

أي أن الدالة زوجية.

أيضا إذا مثلنا الدالة بيانيا ووجدنا أنها متماثلة بالنسبة للمحور (y) كما في الشكل التالي، فإن هذا يعنى أن الدالة زوجية.



وتكون الدالة فردية إذا كانت:

$$f(-x)=-f(x)$$

لكل قيم (x) في نطاق الدالة $(f(x))$. فمثلا لإختبار الدالة:

$$f(x)=2x^3$$

عما إذا كانت فردية، فإننا نضع $(-x)$ مكان (x) لنجد أن

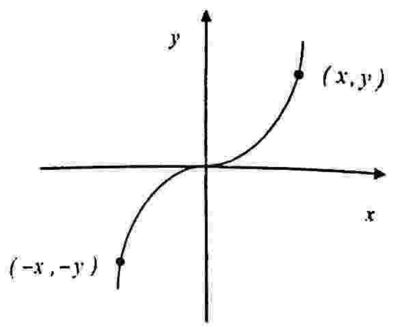
$$f(-x)=2(-x)^3$$
$$=-2x^3$$

أي أن:

$$f(-x)=-f(x)$$

أي أن الدالة فردية.

وإذا مثلنا الدالة فردية بيانيا فإننا نجدها متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل كما في الشكل التالي:



مثـــــال (2.19): أثبت أن الدالتين:

a) $f(x)=9-5x^2$

b) $f(x)=4x^4-x^2+7$

زوجيتان.

الحـــــل:

a) $f(x)=9-5x^2$

$$f(-x)=9-5(-x)^2$$

$$=9-5x^2=f(x)$$

أي أن الدالة زوجية.

$b)\quad f(x)=4x^4-x^2+7$

$$f(-x)=4(-x)^4-(-x)^2+7$$

$$=4x^4-x^2+7=f(x)$$

أي أن الدالة زوجية.

مثـــــال (2.20): أثبت أن الدالتين:

$a)\quad f(x)=4x^3-7x$

$b)\quad f(x)=2x^5+4x^3$

فرديتان.

الحـــــل:

$a)\quad f(x)=4x^3-7x$

$$f(-x)=4(-x)^3-7(-x)$$

$$=-4x^3+7x$$

$$=-(4x^3-7x)=-f(x)$$

أي أن الدالة فردية.

$b)\quad f(x)=2x^5+4x^3$

$$f(-x)=2(-x)^5+4(-x)^3$$

$$=-2x^5-4x^3$$

$$=-(2x^5+4x^3)=-f(x)$$

أي أن الدالة فردية.

•••••••••••

يحدث أحيانا أن الدالة:

$$f(-x)\neq f(x)$$

و:

$$f(-x)\neq -f(x)$$

فيقال عن هذه الدالة في هذه الحالة بأنها ليست زوجية ولا فردية.

مثـــــال (2.21): أثبت أن الدالتين:

$a)\quad f(x)=3x^2-4x+2$

$b)\quad f(x)=2x^3+x^2$

ليستا زوجيتين ولا فرديتين.

الحـــــل:

a) $f(x)=3x^2-4x+2$

$$f(-x)=3(-x)^2-4(-x)+2$$

$$=3x^2+4x+2$$

أي أن:

$$f(-x)\neq f(x)$$

و:

$$f(-x)\neq -f(x)$$

أي أن الدالة ليست فردية ولا زوجية.

b) $f(x)=2x^3+x^2$

$$f(-x)=2(-x)^3+(-x)^2$$

$$=-2x^3+x^2$$

أي أن:

$$f(-x)\neq f(x)$$

و:

$$f(-x)\neq -f(x)$$

أي أن الدالة ليست فردية ولا زوجية.

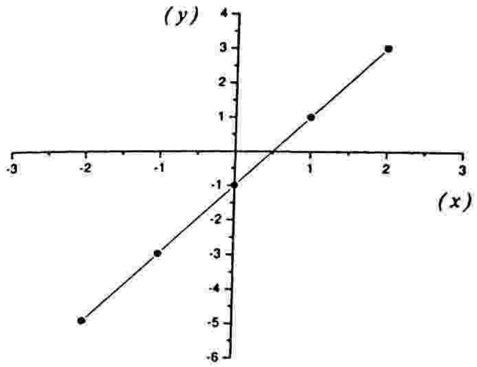
(2.4) رسم الدوال (Graphs of Functions)

الرسم البياني لدالة هو رسم العلاقة $(y=f(x))$ بيانيا، فمثلا إذا كانت $(f(x)=2x-1)$ فإن الرسم البياني يكون هو رسم علاقة بين الأحداثيات $(x,f(x))$، أى رسم $(x,2x-1)$. فنأخذ أي قيمة للمتغير (x) ونجد $(f(x))$ فيمثل هذا نقطة على الرسم البياني، ثم نأخذ قيمة أخرى لـ (x) ونجد $(f(x))$، وهكذا .....

فلو أخذت (x) مثلا القيم $[2,1,0,-1,-2]$ فإننا نجد قيمة $(f(x))$ المناظرة لها، ونستنتج الجدول التالي:

(x)	$f(x)=2x-1$	(x,y)
-2	$f(-2)=2(-2)-1=-5$	$(-2,-5)$
-1	$f(-1)=2(-1)-1=-3$	$(-1,-3)$
0	$f(0)=2(0)-1=-1$	$(0,-1)$
1	$f(1)=2(1)-1=1$	$(1,1)$
2	$f(2)=2(2)-1=3$	$(2,3)$

وبرسم النقاط (x,y) على الأحداثيات الكارتيزية نحصل على الرسم البياني التالي:

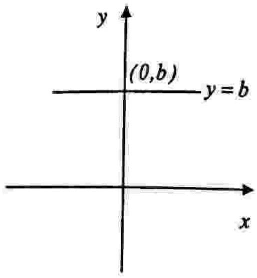


يمثل هذا الرسم البياني معادلة خط مستقيم. معادلات الخط المستقيم "وتسمى بالدالة الخطية" تكون على صورة:

$$y=f(x)=mx+b$$

حيث (m) تمثل ميل الخط المستقيم، و(b) تمثل تقاطع الخط بالمحور (y)، وهي النقطة $(0,b)$. (m) و(b) قد يكونان موجبين أو سالبين أو صفرا.

فمثلا، إذا كانت $(m=0)$، أي أن ميل الخط يساوى صفرا فإن الدالة تكون مقدارا ثابتا، أي$(y=b)$، أي أن الدالة تكون خطا مستقيما موازيا للمحور (x)، ويقطع المحور (y) عند النقطة $(0,b)$ كما في الشكل.



أما إذا كانت (b) تساوى صفرا، فإن الخط المستقيم يمر بنقطة الأصل.

ملاحظتان:

1. إذا قطع الخط المستقيم المحور (x)، فإن هذا التقاطع يكون عندما تكون $(y=0)$.
2. إذا قطع الخط المستقيم المحور (y)، فإن هذا التقاطع يكون عندما تكون $(x=0)$.

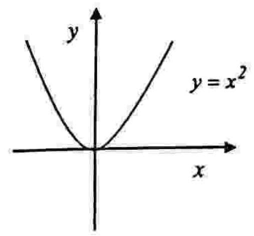
في الأمثلة المتنوعة التالية نرسم بعضا من الدوال المعروفة، وعلى الطالب أن يتحقق من الرسم وذلك بفرض قيم للمتغير (x) وإيجاد القيم المناظرة للمتغير التابع $(f(x))$، ورسم العلاقة بيانيا بين (x) و$(f(x))$.

مثـــــال (2.22): أرسم الدالة:

$$y = f(x) = x^2$$

وأوجد نطاقها ومداها.

الحـــــــل:



[دالة تربيعية]

هذه معادلة منحنى "قطع مكافئ". ونطاق الدالة $(-\infty,+\infty)$، ومدى الدالة $(0,+\infty)$. تسمى هذه الدالة بالدالة التربعية، وهي بصفة عامة تكون على صورة:

$$y = f(x) = ax^2 + b \quad , \quad a \neq 0$$

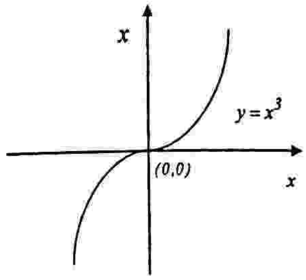
وهي دالة زوجية حيث أنها متماثلة بالنسبة للمحور (y).

مثـــــال (2.23): أرسم الدالة:

$$y = f(x) = x^3$$

وأوجد نطاقها ومداها.

الحـــــــل:



[دالة تكعيبية]

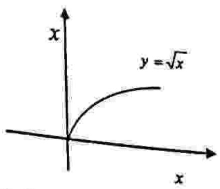
نطاق هذه الدالة ومداها هو كل الأرقام الحقيقية $(\Re)$، أي $(-\infty,+\infty)$، وهي دالة فردية حيث أنها متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

مثـــــال (2.24): أرسم الدالة:

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

وأوجد نطاقها ومداها.

الحـــــــل:



[دالة جذرية]

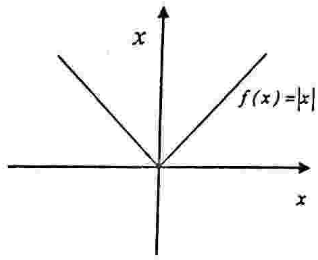
نطاق ومدى هذه الدالة هو $[0,+\infty)$. وهي دالة ليست زوجية ولا فردية، وتسمى بالدالة الجذرية.

مثـــــال (2.25): أرسم الدالة:

$$y = f(x) = |x|$$

وأوجد نطاقها ومداها.

الحـــــل:



[دالة القيمة المطلق]

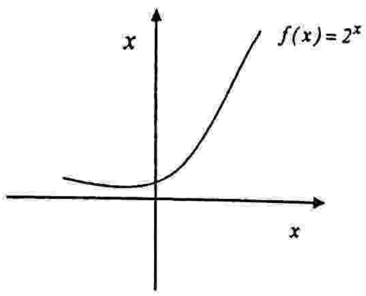
تُسمى هذه بدالة القيمة المطلقة، ونطاقها كل الأعداد الحقيقية، أى $(-\infty,+\infty)$. ومداها $[0,+\infty)$. وهي دالة زوجية.

مثـــــال (2.26): أرسم الدالة:

$$y = f(x) = 2^x$$

وأوجد نطاقها ومداها.

الحـــــل:



[الدالة الأسية]

تُسمى هذه الدالة بالدالة الأسية، وهي على صورة:

$$y = f(x) = a^x$$

حيث (a) عدد موجب أكبر من الصفر، ولايساوى (1). نطاق الدالة $(-\infty,+\infty)$. ومدى الدالة $(0,+\infty)$.

من الدوال الأسية المهمة:

$$y = e^x$$

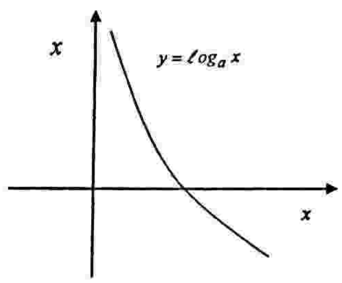
حيث $(e = 2.71828...)$.

مثـــــال (2.27): أرسم الدالة:

$$y = f(x) = \ell og_a x \quad , \quad a>0$$

وأوجد نطاقها ومداها، حيث $(a>0)$، و $(a \neq 1)$.

الحـــــــل:



[الدالة اللوغريتمية]

تُسمى هذه الدالة بالدالة اللوغريتمية، وهي الدالة العكسية للدالة الأسية، ونطاقها $(0,+\infty)$. ومداها $(-\infty,+\infty)$.

توجد دالة لوغريتمية أخرى مهمة تُسمى بالدالة اللوغريتمية الطبيعية وهى:

$$f(x) = \ell n\, x$$

حيث:

$$\ell n\, e = 1$$

$$y = \ell n\, x \quad \Leftrightarrow \quad e^{y} = x$$

(2.5) جبر الدوال (Function Algebra)

الدوال مثل الأعداد الحقيقية يمكن جمعها وطرحها وضربها وقسمتها، والناتج يكون دالة جديدة.

فإذا كانت (f) و (g) دالتين، فإننا نعرف التالى:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$$

كما يمكن أن نضرب الدالة بعدد حقيقي (c) فنحصل على:

$$(cf)(x) = c\,f(x)$$

مثـــــال (2.28): إذا كانت:

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad , \qquad g(x)=\sqrt{x}$$

أوجد نطاق $(f+g)$.

الحـــــــل:

نطاق الدالة$(f(x))$هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $(x=0)$، و نطاق الدالة $(g(x))$ هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة بما فيها الصفر، أى أن:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$=\frac{1}{x}+\sqrt{x} \qquad , \qquad x>0$$

فيكون نطاق مجموع الدالتين هو:

$$D(f)\cap D(g)=(-\infty,+\infty)\cap(0,+\infty)$$

$$=(0,+\infty)$$

مثـــــال (2.29): إذا كانت:

$$f(x)=\sqrt{4-x^2} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}$$

أوجد نطاق $(f\,g)$.

الحـــــــل:

نطاق الدالة$(f(x))$ هو عندما تكون:

$$4-x^2\geq 0$$

$$4\geq x^2$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين؛

$$\pm 2\geq x$$

أي أن:

$$-2\leq x\leq 2$$

أي أن نطاق الدالة $(f(x))$ هو:

$$D_f=[-2,2]$$

ونطاق الدالة $(g(x))$ هو عندما تكون:

$$x-1\geq 0$$

$$x\geq 1$$

أى أن نطاق الدالة $(g(x))$ هو:

$$D_g=[1,\infty)$$

فيكون نطاق الدالة $(f\,g)$ هو:

$$D_{fg} = [-2,2] \cap [1,+\infty)$$

$$= [1,2]$$

فتكون:

$$(f\,g) = \sqrt{4-x^2}\,\sqrt{x-1}$$

$$= \sqrt{(4-x^2)(x-1)} \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

مثـــــال (2.30): إذا كانت:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=\sqrt{1-x}$$

أوجد نطاق $(\frac{f}{g})$ و $(\frac{g}{f})$.

الحــــــل:

نطاق الدالة $(f(x))$ هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة بما فيها الصفر؛

$$D_f = [0,+\infty)$$

ونطاق الدالة $(g(x))$ هو عندما تكون:

$$1-x \ge 0$$

$$-x \ge -1$$

وبالضرب في (-1) وتغيير إشارة المتباينة؛

$$x \le 1$$

أى أن نطاق الدالة $(g(x))$ هو:

$$D_g = (-\infty,1]$$

فيكون نطاق الدالة $(\frac{f}{g})$؛

$$D_{f/g} = (-\infty,1] \cap [0,+\infty)$$

$$= [0,1)$$

ولإيجاد نطاق الدالة $(\frac{g}{f})$؛

$$(\frac{g}{f})(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$D_{g/f} = (-\infty,1) \cap (0,+\infty)$$

$$= (0,1]$$

(2.6) الدوال المحصلة (Composite Functions)

هي طريقة للجمع بين دالتين، ونعرفها كالتالي:

إذا كانت (g) دالة ومداها يقع في نطاق دالة أخرى (f)، فإننا نعرّف $(f o g)$ [وتقرأ $(f \text{ composed with } g)$، أو $(f \text{ of } g)$] كالتالي:

$$(f o g)(x)=f(g(x))$$

ويشتمل نطاق $(f o g)$ على الأعداد (x)التى في نطاق (g) حيث (g) تقع في نطاق (f).

ونوضح هذا التعريف بالأمثلة التالية:

مثـــال (2.31): إذا كانت:

$$f(x)=3x-4 \quad , \quad g(x)=x^2-2x+6$$

أوجد:

a) $(f o g)(x)$ ، b) $(g o f)(x)$

الحـــــل:

a) $(f o g)(x)=f(g(x))$

نضع في مكان كل (x) في الدالة (f) الدالة (g) كالتالي:

$$(f o g)(x)=f(g(x))$$
$$=3[g(x)]-4$$
$$=3[x^2-2x+6]-4$$
$$=[3x^2-6x+18]-4$$

أي أن:

$$(f o g)(x)=3x^2-6x+14$$

b) $(g o f)(x)=g(f(x))$

نضع في مكان كل (x) في الدالة (g) الدالة (f) كالتالي:

$$(g o f)(x)=[f(x)]^2-2[f(x)]+6$$
$$=[3x-4]^2-2[3x-4]+6$$
$$=9x^2-24x+16-6x+8+6$$
$$=9x^2-30x+30$$

أي أن:

$$(g o f)(x)=9x^2-30x+30$$

ملاحظة:

بصفة عامة فإن:

$$(f\circ g)\neq(g\circ f)$$

مثـــال (2.32): إذا كانت:

$$f(x)=13x+3 \quad , \quad g(x)=21x+5$$

أوجد:

a) $(f\circ g)(x)$ ، b) $(g\circ f)(x)$

الحـــل:

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=13[21x+5]+3$$

$$=[273x+65]+3$$

$$(f\circ g)(x)=273x+68$$

b) $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$$=21[13x+3]+5$$

$$=[273x+63]+5$$

$$(g\circ f)(x)=273x+68$$

في هذه الحالة $(f\circ g=g\circ f)$ ، ولكن بصفة عامة فإنهما ليستا متساويتين.

مثـــال (2.33): إذا كانت:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x)=x+1$$

أوجد نطاق كل من:

a) $(f\circ g)(x)$ ، b) $(g\circ f)(x)$

c) $(f\circ f)(x)$ ، d) $(g\circ g)(x)$

الحـــل:

a) $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$$=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+1}$$

$$D=[-1,+\infty)$$

$b)\quad (g o f)(x) = g(f(x))$

$= g(\sqrt{x})$

$= \sqrt{x} + 1$

$D = [0, +\infty)$

$c)\quad (f o f)(x) = f(f(x))$

$= f(\sqrt{x})$

$= \sqrt{\sqrt{x}} = (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$

$D = [0, +\infty)$

$d)\quad (g o g)(x) = g(g(x))$

$= g(x+1)$

$= [x+1] + 1$

$= x + 2$

$D = (-\infty, +\infty)$

مثـــال (2.34): إذا كانت:

$f(x) = x - 2 \quad , \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

أوجد نطاق:

$(g o f)(x)$

الحـــل:

$a)\quad (g o f)(x) = g(f(x))$

$= g(x-2)$

$= 5[x-2] + [\sqrt{x-2}]$

$= 5x - 10 + \sqrt{x-2}$

$D = [2, +\infty)$

أمثلة متنوعة (2)

مثـــال (1): أوجد قيمة $f(x)$ للحالات التالية:

a) $f(x)=-3x^2+2x-4$, at $x=0$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, at $x=4$

c) $f(x)=|x|+4$, at $x=-1$

الحــــــل:

a) $f(x)=-3x^2+2x-4$, at $x=0$

$f(0)=-3(0)+2(0)-4=0+0-4=-4$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, at $x=4$

$f(4)=\frac{(4)}{(4)^2+1}=\frac{4}{16+1}=\frac{4}{17}$

c) $f(x)=|x|+4$, at $x=-1$

$f(-1)=|-1|+4=1+4=5$

مثـــال (2): أوجد نطاق ومدى الدالتين:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$, b) $f(x)=\frac{2}{x-5}$

الحــــــل:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x-8$

$D=(-\infty,+\infty)$, $R=(-\infty,+\infty)$

b) $f(x)=\frac{2}{x-5}$, $x\neq 5$

$D=(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$

لإيجاد المدى نجد (x) بدلالة (y)؛

$f(x)=y=\frac{2}{x-5}$

نضرب الوسطين في الطرفين؛

$yx-5y=2$

$yx=5y+2$

$x=\frac{5y+2}{y}$, $y\neq 0$

أي أن:

$R=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

مثـــال (3): أوجد نطاق الدالتين:

a) $f(x)=\sqrt{8-4x}$ ، b) $f(x)=\frac{3x}{x^2-4}$

الحـــل:

a) $f(x)=\sqrt{8-4x}$

وحيث أن المقدار الذى تحت الجذر لا بد أن يكون موجبا أو صفرا،

فإن:

$$8-4x\ge 0$$

$$-4x\ge -8$$

بالقسمة على معامل (x) وهو العدد (-4)، وتغيير إشارة المتباينة حيث أننا قسمنا على عدد سالب؛

$$x\le 2$$

أي أن نطاق الدالة:

$$D=(-\infty,2]$$

b) $f(x)=\frac{3x}{x^2-4}$, $x\neq \pm 2$

مدى الدالة كل الأعداد الحقيقية ماعدا $(x=2)$ و $(x=-2)$، أي أن:

$$D=\Re\setminus[-2,2]$$

ملاحظة:

نتذكّر مرة أخرى أن المقدار الذى تحت الجذر لا بد أن يكون أكبر من أو يساوى صفرا.

مثـــال (4): أوجد نطاق الدالتين:

a) $f(x)=\frac{4x-7}{\sqrt{5x+3}}$ ، b) $f(x)=\frac{8x}{\sqrt{4-2x}}$

الحـــل:

a) $f(x)=\frac{4x-7}{\sqrt{5x+3}}$

$$5x+3\ge 0$$

$$5x\ge -3$$

$$x\ge -\frac{3}{5}$$

أي أن نطاق الدالة؛

$$D=(-\frac{3}{5},+\infty]$$

لاحظ أن $(-\frac{3}{5})$ ليست ضمن الحل، لأن هذا يجعل المقام صفرا.

b) $f(x)=\frac{8x}{\sqrt{4-2x}}$

$$4-2x>0$$

$$-2x>-4$$

بالقسمة على (-2) وتغيير إشارة المتباينة نحصل على:

$$x<2$$

أي أن نطاق الدالة؛

$$D=(-\infty,2)$$

لاحظ أن (2) ليست من ضمن الحل، لأن هذا يجعل المقام صفرا.

> **ملاحظة:**
>
> لاحظ أن المقام يجب أن لا يكون صفرا، فإذا كان الجذر وحده في المقام، فإن المقدار الذي تحت الجذر يجب أن يكون أكبر من الصفر.

مثـــال (5): أوجد نطاق الدالتين:

a) $f(x)=\sqrt[4]{3x-9}$ ، b) $f(x)=\frac{4x}{\sqrt[3]{2x+10}}$

الحـــل:

a) $f(x)=\sqrt[4]{3x-9}$

المقدار الذي تحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوى صفرا.

أي أن:

$$3x-9\geq 0$$

$$3x\geq 9$$

$$x\geq 3$$

أي أن نطاق الدالة؛

$$D_f=[3,+\infty)$$

b) $f(x)=\frac{4x}{\sqrt[3]{2x+10}}$

المقام لابد أن لا يكون صفرا، وفي حالة الجذر التكعيبي فليس من الضروري أن يكون المقام موجبا، أي أن:

$$2x+10\neq 0$$

أو:

$$x \neq -5$$

أي أن نطاق الدالة هو كل الأعداد الحقيقية ماعدا $(x=-5)$،

$$D_f = \Re \backslash \{-5\}$$

ملاحظتان:

1. عند إيجاد النطاق لدالة تحتوى على جذر زوجي فإنها تعامل معاملة الجذر التربيعي، أى أن المقدار الذى تحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوى صفرا.
2. عند إيجاد النطاق لدالة تحتوى على جذر فردي فإنها تُعامل وكأن الجذر غير موجود.

مثـــال (6): أوجد نطاق الدالة:

$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{3x+4}{2x-8}}$$

الحـــل:

$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{3x+4}{2x-8}}$$

حيث أن الجذر فردى، فإن الشرط الوحيد هو أن لا يكون المقام صفرا؛ أي:

$$2x-8>0$$

$$2x>8$$

$$x>4$$

أي أن نطاق الدالة؛

$$D=(4,+\infty)$$

مثـــال (7): أوجد نطاق الدالتين:

$a)\quad f(x)=\sqrt{|x|-3}$ ، $b)\quad f(x)=\dfrac{x-8}{\sqrt{2-|x|}}$

الحـــل:

$a)\quad f(x)=\sqrt{|x|-3}$

لكي يكون الجذر عدداً حقيقيا لا بد أن تكون:

$$|x|-3 \geq 0$$

$$|x| \geq 3$$

أي أن:

إما: $x \geq 3$ أو: $x \leq -3$

أي أن نطاق الدالة؛

$$D_f = (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$$

b) $f(x)=\dfrac{x-8}{\sqrt{2-|x|}}$

الجذر يجب أن يكون عددا حقيقيا ويجب أن لا يساوى صفرا لأنه مقام؛ أي أن:

$$2-|x|>0$$

$$-|x|>-2$$

بضرب طرفى المتباينة في (-1) وتغيير إشارة المتباينة؛

$$|x|<2$$

أي أن:

$$-2<x<2$$

فيكون نطاق الدالة:

$$D=(-2,2)$$

مثـــال (8): أوجد نطاق الدالتين:

a) $f(x)=\dfrac{3x+8}{|x|-4}$ ، b) $f(x)=\sqrt{49-x^2}$

الحـــل:

a) $f(x)=\dfrac{3x+8}{|x|-4}$

المقام لا يجب أن يكون صفرا؛

$$|x|-4 \neq 0$$

$$|x| \neq 4$$

أي أن:

$$x \neq \pm 4$$

أي أن نطاق الدالة كل الأعداد الحقيقية ماعدا $x=4$ و $x=-4$، أي:

$$D_f = \Re \backslash \{\pm 4\}$$

b) $f(x)=\sqrt{49-x^2}$

المقدار الذى تحت الجذر لابد أن يكون أكبر من أو يساوى صفرا، اي:

$$49-x^2 \ge 0$$

$$-x^2 \ge -49$$

وبضرب طرفى المتباينة في (-1) وتغيير إشارة المتباينة؛

$$x^2 \le 49$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين؛

$$x \le \pm 7$$

أو:

$$-7 \le x \le 7$$

فيكون نطاق الدالة:

$$D=[-7,7]$$

مثــــال (9): أوجد عما إذا كانت الدوال التالية زوجية أو أحادية أو غيــر ذلك:

a) $f(x)=4x^3$, b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, d) $f(x)=2x^2-5$

e) $f(x)=x+|x|$, f) $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-9}$

الحـــــل:

a) $f(x)=4x^3$

$$f(-x)=4(-x)^3=-4x^3=-f(x)$$

حيث أن $(f(-x)=-f(x))$ فالدالة فردية.

b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$f(-x)=\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}=-f(x)$$

$(f(-x)=-f(x))$ أي أن الدالة فردية.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$$

$(f(-x)=f(x))$ أي أن الدالة زوجية.

d) $f(x)=2x^2-5$

$$f(-x)=2(-x)^2-5=2x^2-5=f(x)$$

أي أن الدالة زوجية. $(f(-x)=f(x))$

e) $f(x)=x+|x|$

$$f(-x)=-x+|-x|=-x+|x|$$

أي أن:

$$(f(-x)\neq f(x))$$

أيضا:

$$-f(x)=-x-|x|\neq f(-x)$$

أي أن الدالة ليست فردية ولا زوجية.

f) $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-9}$

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{3(-x)^2-9}=-\frac{x^3}{3x^2-9}=-f(x)$$

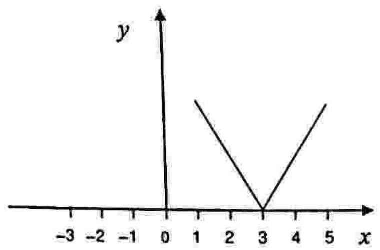
أي أن الدالة فردية. $(f(-x)=-f(x))$

مثـــال (10): أرسم الدالتين وأوجد نطاق ومدى كل منهما:

a) $f(x)=|x-3|$, b) $f(x)=\begin{cases}x^2 & , -2\le x\le 2\\ 4 & , 2\le x\le 8\end{cases}$

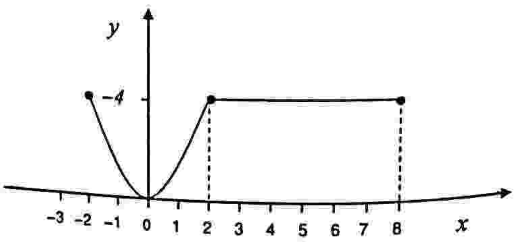
الحـــــــل:

a)



$D=\Re$, $R=[0,+\infty)$

b)



$D=[-2,8]$ $R=[0,8]$

مثـــال (11): إذا كانت:

$$f(x)=\sqrt{x+2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{3-x}$$

أوجد:

a) $(f+g)(x)$, b) $(f-g)(x)$

c) $(fg)(x)$, d) $(f/g)(x)$

الحـــل:

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$$=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$$

b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

$$=\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}$$

c) $(fg)(x)=f(x)g(x)$

$$=\sqrt{x+2}\,\sqrt{3-x}$$

$$=\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

d) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}} \quad , \quad x\neq 3$

مثـــال (12): إذا كانت:

$$f(x)=\frac{1}{x+2} \quad , \quad g(x)=\frac{4}{x-1}$$

أوجد الدوال المحصلة التالية:

a) $(f o g)$, b) $(g o f)$

c) $(f o f)$, d) $(g o g)$

الحـــل:

a) $(f o g)=f(g(x))$

$$=f(\frac{4}{x-1})$$

$$=\frac{1}{(\frac{4}{x-1})+2}$$

بضرب البسط والمقام في $(x-1)$؛

$$(f o g)=\frac{x-1}{4+2x-2}=\frac{x-1}{2x+2}$$

b) $(g o f)=g(f(x))$

$$=g(\frac{1}{x+2})$$

$$=\frac{4}{(\frac{1}{x+2})-1}$$

بضرب البسط والمقام في $(x+2)$؛

$$(g o f)=\frac{4(x+2)}{1-(x+2)}$$

$$=\frac{4x+8}{1-x-2}=\frac{4x+8}{-x-1}$$

c) $(f o f)=f(f(x))$

$$=f\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{x+2}\right)+2}$$

بضرب البسط والمقام في $(x+2)$؛

$$(f o f)=\frac{x+2}{1+2(x+2)}=\frac{x+2}{1+2x+4}$$

$$=\frac{x+2}{2x+5}$$

d) $(g o g)(x)=g(g(x))$

$$=g\left(\frac{4}{x-1}\right)$$

$$=\frac{4}{\left(\frac{4}{x-1}\right)-1}$$

بضرب البسط والمقام في $(x-1)$؛

$$(g o g)(x)=\frac{4(x-1)}{4-(x-1)}=\frac{4x-4}{4-x+1}$$

$$=\frac{4x-4}{5-x}$$

مثـــال (12): إذا كانت:

$f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=2x+3$

أوجد نطاق:

a) $(f o g)$, b) $(g o f)$

الحـــل:

a) $(f o g)(x)=f(g(x))$

$$=f(2x+3)$$

$$=\sqrt{2x+3}$$

$$D=[-\frac{2}{3},+\infty)$$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= g(\sqrt{x})$$

$$= 2\sqrt{x} + 3$$

$$D = [0, +\infty)$$

مســـائل (2)

مسألة (1): إذا كانت:

$$f(x) = 2x + 5$$

أوجد:

a) $f(0)$, b) $f(3)$, c) $f(-\frac{1}{2})$, d) $f(-4)$

مسألة (2): إذا كانت:

$$f(x) = x^3 + 4x - 3$$

أوجد:

a) $f(1)$, b) $f(-1)$, c) $f(0)$, d) $f(\sqrt{2})$

مسألة (3): إذا كانت:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

أوجد:

a) $f(\frac{1}{a})$, b) $f(a^2)$, c) $f(\sqrt{a})$

مسألة (4): إذا كانت:

$$f(x)=x^2-2x+7$$

أوجد:

$$f(x+4)$$

مسألة (5): أوجد نطاق ومدى الدوال التالية:

a) $f(x)=7.4$, b) $f(x)=8x$

c) $f(x)=\sqrt{x+5}$, d) $f(x)=\frac{-4}{x^3}$

مسألة (6): أوجد نطاق ومدى الدالتين:

a) $f(x)=4\sqrt{x}$, b) $f(x)=-4\sqrt{x}$

مسألة (7): أوجد نطاق ومدى الدالتين:

a) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$, b) $f(x)=\frac{x+5}{x-3}$

مسألة (8): إذا كانت:

$f(x)=x^2-4x$, $g(x)=3x-1$

أوجد:

a) $(f+g)(-2)$, b) $(f-g)(-2)$

c) $(fg)(3)$, d) $(\frac{f}{g})(3)$

مسألة (9): إذا كانت:

$f(x)=3x^2+2$, $g(x)=4x^4+5x$

أوجد:

a) $(f+g)(x)$, b) $(fg)(x)$, c) $(\frac{f}{g})(x)$

مسألة (10): إذا كانت:

$f(x)=3x+1$, $g(x)=-2$

أوجد:

a) $(f+g)(x)$, b) $(fg)(x)$

مسألة (11): إذا كانت:

$f(x)=x^2$, $g(x)=-2x+1$

أوجد:

a) $(f+g)(x)$, b) $(fg)(x)$

مسألة (12): إذا كانت:

$f(x)=3x+2$, $g(x)=-4x-6$

أوجد:

a) $(fog)(x)$, b) $(gof)(x)$

مسألة (13): إذا كانت:

$f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$

أوجد:

a) $(fog)(x)$, b) $(gof)(x)$

مسألة (14): إذا كانت:

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, $g(x)=\sqrt{x+1}$

أوجد:

a) $(fog)(x)$, b) $(gof)(x)$

مسألة (15): إذا كانت:

$f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

أوجد:

a) $(fog)(x)$, b) $(gof)(x)$

مسألة (16): أوجد الدوال العكسية للدوال:

a) $f(x)=4x-5$, b) $f(x)=1-2x^3$

c) $f(x)=-2x^5+\frac{9}{4}$, d) $f(x)=\sqrt{3-2x}$

e) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

مسألة (17): أى من الدوال التالية زوجية أو فردية أو ليست زوجية ولافردية:

a) $f(x)=x^5+2x^3$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

مسألة (18): صنف الدوال التالية، هل هي فردية أو زوجية أو ليست فردية ولا زوجية:

$a)\ f(x)=8 \quad , \quad b)\ f(x)=\dfrac{1}{x-1} \quad , \quad c)\ f(x)=3x-4$

مسألة (19): أى من الدوال التالية زوجية أو فردية أو ليست زوجية ولافردية:

$a)\quad f(x)=4x^2-7x$

$b)\quad f(x)=\dfrac{1}{4}x^8+2x^4$

$c)\quad f(x)=x\sqrt{1-x^2}$

مسألة (20): أرسم الدالة التالية، وأوجد النطاق والمدى:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,-3<x\le 1 \\ 1 & ,1<x<2 \\ 3-x & ,\quad x\ge 2 \end{cases}$$

إجابات (2)

1-a) 5   1-b) 11   1-c) 4   1-d) -3

2-a) 2   2-b) -8 2-c) -3 2-d) $6\sqrt{2}-3$

3-a) $\dfrac{a^2}{1+4a^2}$ 3-b) $\dfrac{1}{a^4+4}$ 3-c) $\dfrac{1}{a+4}$

4) $x^2+6x+15$

5-a) $D=(-\infty,+\infty)$ ، $R=7.4$

5-b) $D=(-\infty,+\infty)$ ، $R=(-\infty,+\infty)$

5-c) $D=(-5,+\infty)$ ، $R=[0,+\infty)$

5-d) $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ، $R=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

6-a) $D=[0,+\infty)$ ، $R=[0,+\infty)$

6-b) $D=[0,+\infty)$ ، $R=(-\infty,0]$

7-a) $D=[-5,5]$ ، $R=[0,5]$

7-b) $D=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ ، $R=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

8-a) 5   8-b) 19   8-c) -24 8-d) $-\dfrac{3}{8}$

9-a) $4x^4+3x^2+5x+2$

9-b) $12x^6+8x^4+15x^3+10x$

9-c) $\dfrac{3x^2+2}{4x^4+5x}$

10-a) $3x-1$ ، 10-b) $-6x-2$

11-a) x^2-2x+1 ، 11-b) $-3x^3+x^2$

12-a) $-12x-16$ ، 12-b) $-12x-14$

13-a) x ، 13-b) $|x|$

14-a) $\dfrac{x}{x+2}$ ، 14-b) $\sqrt{\dfrac{2x^2}{x^2+1}}$

15-a) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2-1}}$ ، 15-b) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}$

16-a) $\dfrac{x+5}{4}$ ، 16-b) $\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{2}}$

16-c) $\sqrt[5]{\dfrac{9}{8}-\dfrac{x}{2}}$ ، 16-d) $\dfrac{3-x^2}{2}$

16-e) $\dfrac{1+x}{1-x}$

17-a) فردية ، 17-b) زوجية ، 17-c) ليست فردية ولا زوجية

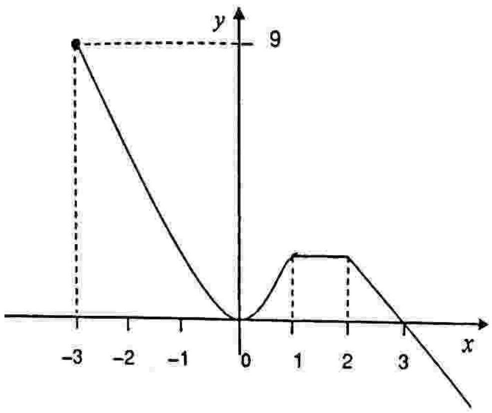
18-a) زوجية ، 18-b) ليست فردية ولا زوجية

18-c) ليست فردية ولا زوجية

19-a) ليست فردية ولا زوجية ، 19-b) زوجية

19-c) فردية

20



$D=(-3;+\infty)$ ، $R=(-\infty,9)$

3

النهايات

Limits

(3.1) النهاية (the limit)

المدخل إلى علم التفاضل والتكامل فهم ما هية "نهاية الدالة". ونعتبر فهمنا لها جسرا يربط بين رياضيات الجبر ورياضيات التفاضل والتكامل.

نبدأ بالسؤال: ماذا نقصد عندما نقول أن نهاية الدالة $f(x)$ هي (N) عندما تقترب "تؤول" (x) من مقدار ثابت (c)، أي ماذا نقصد بالمعادلة التالية:

$$\lim_{x \to c} f(x) = N$$

والجواب: إننا نقصد أن الدالة عندها نهاية هي (N) عندما تقترب (x) من العدد (c).

ولكن هناك شرط مهم وهو أن الدالة يجب أن تكون معرفة في الفترة التي تقترب فيها (x) من (c)، ولكن ليس بالضرورة أن تكون معرفة عند (c) نفسها، والنهاية (N) يجب أن تكون عدداً حقيقياً.

ونعيد التعريف بطريقة أخرى، وهي أنه عندما تكون (x) تقريبا تساوى (c) [ولكن لا تساوى (c)] تكون قيمة الدالة $f(x)$ تقريبا تساوى (N).

وسنوضح هذا بالمثال العددي التالي:

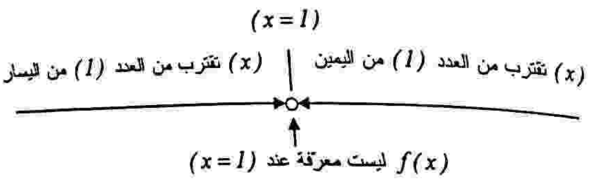
مثـــــال (3.1): أوجد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

الحـــــل:

نلاحظ أولا أن الدالة $\left(f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ ليست معرفة عند $(x=1)$، وذلك لأنه في هذه الحالة يكون المقام صفرا، والقسمة على الصفر ليست معرّفة، ولكن $f(x)$ تكون معرّفة لكل الأعداد التي تكون أكبر من (1)، وأيضا لكل الأعداد التي تكون أصغر من (1).

أي أن $f(x)$ تكون معرّفة عندما تقترب (x) من (1) سواء من اليمين $(x>1)$ أو من اليسار $(x<1)$، كما هو موضح في الشكل التالي، ولكنها ليست معرّفة عند $(x=1)$، وهو ما عبرنا عنه بالدائرة المفتوحة على خط الأعداد.



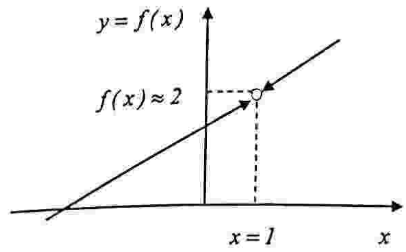
ويوضح الجدول التالي مقدار $f(x)$ للحالتين:

(x) تقترب من (1) من اليمين ↓ (x) تقترب من (1) من اليسار

(x)	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

من الجدول، نلاحظ أن $f(x)$ تقترب رويدا رويدا من العدد (2) كلما أقتربت (x) من العدد (1) من أي جهة.

ونلاحظ أيضا من الرسم البياني التالي، أن الدالة $f(x)$ تقترب من العدد (2) كلما أقتربت (x) من العدد (1) من أي جهة، ولكن الدالة ليست معرّفة عند $(x=1)$، وهو ما عبرنا عنه في الرسم بالدائرة المفتوحة.



نستنتج من شرحنا السابق أن النهاية التي تؤول إليها $f(x)$ عندما تؤول (x) للعدد (1) هو العدد (2)، ونعبر عن هذه الحقيقة رياضيا كالتالي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

مثـــال (3.2): أوجد:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+4)$$

الحـــل:

إذا أخذنا قيماً أصغر أو أكبر من (3) للمتغير (x)، وعوضنا عن (x) في الدالة $(f(x)=x^2+4)$ نجد أن الدالة تقترب من العدد (13)، وهو ما نعبر عنه كالتالي:

$$\lim_{x\to 3}(x^2+4)=13$$

نلاحظ في هذه الحالة أن النهاية (13) هي فعلا قيمة الدالة $f(x)$ عن $(x=3)$، أي أن:

$$f(3)=((3)^2+4)=9+4=13$$

(3.2) النهايات اليمنى واليسرى

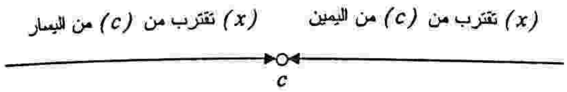
(Left and right limits)

عندما عبرنا عن نهاية دالة جبرية كالآتي:

$$\lim_{x\to c}f(x)=N$$

لاحظنا أن (x) يمكن أن تقترب من العدد الثابت (N) بطريقتين، الأولى: من اليسار حيث تكون (x) أصغر من العدد (c) وتقترب منه،

والثانية: من اليمين حيث تكون (x) أكبر من العدد (c) وتقترب منه، والتي نوضحها رسما كالتالي:



ونعبر عنها رياضيا كالتالي:

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=L$$

حيث (L) تعني يسار $(left)$، أي أن نهاية الدالة تكون (L) عندما تقترب (x) من (c) من جهة اليسار ولكنها دائما أصغر منها، و:

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=R$$

حيث (R) تعني يمين $(right)$، أي أن نهاية الدالة تكون (R) عندما تقترب (x) من (c) من جهة اليمين ولكنها دائما أكبر منها.

> ملاحظة:
> الرمز (c^-) يذكرنا بأن (x) أصغر من (c)، والرمز (c^+) يذكرنا بأن (x) أكبر من (c).

ولكن هل تتساوى النهايتان؟ بمعنى أن هل نهاية $f(x)$ التى تقترب فيها (x) من جهة اليسار من (c) تساوى نهاية $f(x)$ التي تقترب فيها (x) من جهة اليمين من (c)؟.

بمعنى هل:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

أي هل:

$$L = R$$

والجواب: ليس دائما تتساوى النهايتان، فإذا كانت:

$$L = R$$

تكون نهاية الدالة $f(x)$، أي $[\lim_{x\to c} f(x)]$ موجودة $(exist)$، أي معرّفة.

أما إذا كانت:

$$L \neq R$$

فإن نهاية الدالة $f(x)$، أي $[\lim_{x\to c} f(x)]$ تكون غير موجودة (does not exist)، أي غير معرّفة.

ونلخص ما سبق في التالي:

لتكون $[\lim_{x\to c} f(x)]$ موجودة لابد أن تكون:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

مثـــــال (3.3): أثبت أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

غير موجودة.

الحـــــل:

لكي نثبت أن نهاية الدالة $(f(x)=\frac{1}{x})$ غير موجودة فإننا نجعل (x) تقترب من الصفر من جهة اليسار، أي $(x\to 0^-)$، ثم نجعلها تقترب من الصفر من جهة اليمين، أي، $(x\to 0^+)$، فإذا كانت النهايتان غير متساويتين فإن نهاية الدالة تكون غير موجودة. والجدول التالي يبين هذا الإقتراب.

(x) تقترب من الصفر من اليمين ↓ (x) تقترب من الصفر من اليسار

(x)	-0.1	-0.01	-0.001		0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

أي أن النهايتين غير متساويتين، أي أن:

$$L \neq R$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

غير موجودة.

مثـــــال (3.4): للدالة:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad x\leq 2 \\ -\frac{3}{2}x+6 & , \quad x>2 \end{cases}$$

أوجد:

$$a)\ \lim_{x\to 2^-} f(x) \qquad , \quad b)\ \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

الحـــــــل:

عندما تكون $(x \le 2)$، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب (x) من العدد (2) من الجهة اليسرى، أي أن (x) دائما أصغر من العدد (2)، فتكون:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x+1) = 2+1 = 3$$

ولنجد قيمة $f(x)$ عندما تكون $(2 > x)$، فإننا نجعل (x) تقترب من العدد (2) من الجهة اليمنى، أي أن (x) دائما تكون أكبر من العدد (2)، فتكون:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(-\frac{3}{2}x+6)$$

$$=(-\frac{3}{2}(2)+6)$$

$$=(-3+6)=3$$

أي أن النهاية اليسرى والنهاية اليمنى متساويان، وعليه فإن:

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

تكون موجودة، أي معرّفة، وتساوي العدد (3).

(3.3) خواص النهايات (properties of limits)

سنتناول الخواص الجبرية للنهايات ونوضح كل خاصية بالأمثلة.

فإذا كانت النهاية لكل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ موجودتين، فإننا يمكن أن نجد التالي:

1. نهاية مقدار ثابت:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} b = b$$

أي أن نهاية ثابت هي الثابت.

مثال (3.5):

a) $\lim_{x\to -2} 8 = 8$

b) $\lim_{x\to \frac{3}{2}} -12 = -12$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$

2. نهاية $f(x)=x$:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$$

مثال (3.6):

a) $\lim_{x\to -3} x = -3$

b) $\lim_{x\to 3} x = +3$

c) $\lim_{x\to 0} x = 0$

3. نهاية مجموع دالتين:

$$\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$$

مثال (3.7):

a) $\lim_{x\to 2} (3+x) = \lim_{x\to 2} 3 + \lim_{x\to 2} x$

$= 3 + 2 = 5$

b) $\lim_{x\to -2} (3+x) = \lim_{x\to -2} 3 + \lim_{x\to -2} x$

$= 3 + (-2) = 1$

4. نهاية الفرق بين دالتين:

$$\lim_{x\to c} [f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$$

مثال (3.8):

a) $\lim_{x\to 1} (x-4) = \lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 4$

$= 1 - 4 = -3$

b) $\lim_{x\to -3} (8-x) = \lim_{x\to -3} 8 - \lim_{x\to -3} x$

$= 8 - (-3) = 11$

5. نهاية حاصل ضرب دالتين:

$$\lim_{x\to c}[f(x).g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)].[\lim_{x\to c} g(x)]$$

مثـــال (3.9):

a) $$\lim_{x\to -4} 5x = [\lim_{x\to -4} 5].[\lim_{x\to -4} x]$$

$$= 5 \times (-4) = -20$$

b) $$\lim_{x\to 3}(4x+2) = \lim_{x\to 3}(4x) + \lim_{x\to 3} 2$$

$$= [\lim_{x\to 3} 4][\lim_{x\to 3} x] + \lim_{x\to 3} 2$$

$$= 4 \times (3) + 2 = 14$$

6. نهاية الأس أو الجذر:

a) $$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$$

b) $$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

حيث $(n \geq 2)$، وجميع النهايات تكون موجودة.

مثـــال (3.10):

a) $$\lim_{x\to 0}(x^3+2)^5 = [\lim_{x\to 0}(x^3+2)]^5$$

$$= [(0)^3+2]^5 = [2]^5 = 32$$

b) $$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+12} = \sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+12)}$$

$$= \sqrt{(2)^2+12} = \sqrt{4+12}$$

$$= \sqrt{16} = 4$$

7. نهاية حاصل قسمة دالتين:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

حيث $(\lim_{x\to c} g(x) \neq 0)$

مثـــال (3.11):

a) $$\lim_{x\to 3}\frac{(2x^2+1)}{(x^3-2)} = \frac{\lim_{x\to 3}(2x^2+1)}{\lim_{x\to 3}(x^3-2)}$$

$$= \frac{(2(3)^2+1)}{((3)^3-2)} = \frac{2\times 9+1}{27-2} = \frac{19}{25}$$

b) $$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x+6}{x-1}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{x+6}{x-1}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 2}(x+6)}{\lim_{x\to 2}(x-1)}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2+6}{2-1}}=\sqrt[3]{\frac{8}{1}}=2$$

8. إيجاد نهاية دالة عندما يؤول المقام للصفر:

مثـــال (3.12): أوجد:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$$

الحـــل:

واضح أنه عندما تكون $(x=-2)$ فإن المقام يكون صفراً،

ولكن هذا لا يعني أن الدالة غير موجودة عندما تقترب (x) من (-2).

لإيجاد نهاية هذه الدالة نلجأ إلى عملية التحليل الجبري ونحاول

أن نتخلص من المقدار الذى يجعل المقام صفراً.

وبتحليل البسط والمقام نحصل على التالي:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

وحيث أننا نريد نهاية الدالة عندما تؤول (x) إلى (-2) وليس عند $(x=-2)$، $(x+2)$ لا تساوى صفراً، وبالتالي يمكن إختصارها، فنحصل على:

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)}{(x-2)}$$

وبالتعويض عن $(x=-2)$،

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)}{(x-2)}=\frac{-2+3}{-2-2}=-\frac{1}{4}$$

ملاحظة هامة:

على الطالب مراجعة التحليل الجبرى بكل الطرق، وسنذكر هنا بعضاً منها:

فرق المربعين:

$$(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$$

فرق المكعبين:

$$(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

مجموع المكعبين:

$$(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

مثـــال (3.13): أوجد:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$$

الحـــل:

بالتعويض المباشر عن (x) نجد أن المقام يساوى صفرا، بالتالي نلجأ إلى التحليل، وحيث أن البسط عبارة عن فرق مربعين، فإننا نحلله كالآتي:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)(x^2+1)$$

$$=(1+1)(1^2+1)=2+2=4$$

مثـــال (3.14): أوجد النهايات التالية:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$$

الحـــل:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$

نلاحظ أولا أن المقام يكون صفرا عندما تكون $(x=2)$، ونلاحظ ثانيا أن البسط فرق مكعبين، فنحلل البسط لنتخلص من المقام كالآتي:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$$

$$=((2)^2+2(2)+4)$$

$$=4+4+4=12$$

$$b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$$

نلاحظ أن المقام يساوى صفرا عندما تكون $(x=-2)$، وأن البسط مجموع مكعبين، فنحلل البسط لنتخلص من المقام؛

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)$$

$$=((-2)^2-2(-2)+4)$$

$$=4+4+4=12$$

مثـــــال (3.15): أوجد:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

الحـــــل:

لو عوضنا عن $(x=9)$ فإن البسط يكون صفرا وكذلك المقام، ولكن إذا أعتبرنا أن البسط فرق مربعين نحصل على التالي:

$$\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)}=\lim_{x\to 9}(\sqrt{x}+3)$$

$$=\sqrt{9}+3)=3+3=6$$

•••••••••••

في الصفحات التالية سنعرض عدة أمثلة عن النهايات ولكي يستفيد الطالب من هذه الأمثلة عليه محاولة الحل بنفسه أولا ثم يقارن بحل الكتاب.

مثـــــال (3.16): أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+1}$, b) $\lim_{x\to 0} 15.4$

c) $\lim_{x\to -3}(2x^2-1)$, d) $\lim_{x\to 3}\frac{2}{x}$

الحـــــل:

في هذا المثال نلاحظ أنه لا يوجد مقام يؤول للصفر، أي أنه ليس هناك مشكلة في التعويض المباشر عن (x)؛

a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x+1}=\frac{(2)^2+4}{(2)+1}=\frac{4+4}{3}=\frac{8}{3}$

b) $\lim_{x\to 0} 15.4 = 15.4$

c) $\lim_{x\to -3} (2x^2-1) = (2(-3)^2-1) = 18-1 = 17$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{x} = \frac{2}{3}$

مثـــــال (3.17): أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1}$

c) $\lim_{x\to 2} (x^2-3x)^5$, d) $\lim_{x\to 8} \frac{x^{4/3}}{3}$

الحـــــــل:

نعوض عن (x) مباشرة لأنه لا يوجد مقام مقداره صفر،

a) $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2 = 3(2(-1)-1)^2$

$= 3(-2-1)^2 = 3(-3)^2$

$= 27$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{(0)^2+1} = \frac{0}{1} = 0$

c) $\lim_{x\to 2} (x^2-3x)^5 = ((2)^2-3(2))^5$

$= (4-6)^5 = (-2)^5 = -32$

d) $\lim_{x\to 8} \frac{x^{4/3}}{3} = \frac{(8)^{4/3}}{3} = \frac{(2^3)^{4/3}}{3} = \frac{2^4}{3}$

$= \frac{16}{3}$

مثـــــال (3.18): أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x\to -7} \frac{x^2-49}{x+7}$, b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4-16}{4-x^2}$

c) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, d) $\lim_{x\to 0} \frac{(9+x)^2-81}{x}$

الحـــــــل:

نلاحظ في هذا المثال أنه عندما نعوض عن (x) فإن جميع المقامات تصبح صفراء، ونلاحظ أيضا أن البسط عبارة عن فرق مربعين:

a) $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x^2-49}{x+7} = \lim\limits_{x \to -7} \dfrac{(x-7)(x+7)}{(x+7)}$

$= \lim\limits_{x \to -7} (x-7) = ((-7)-7) = -14$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4-16}{4-x^2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{-(x^2-4)}$

$= \lim\limits_{x \to -2} -(x^2+4)$

$= -((-2)^2+4) = -(4+4) = -8$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{(\sqrt{4}+2)}$

$= \dfrac{1}{(2+2)} = \dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(9+x)^2-81}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{((9+x)-9)((9+x)+9)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+18)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x+18$

$= 0+18 = 18$

مثـــال (3.19): أوجد النهايات التالية:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-64}{12(x-4)}$, b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+27}{9(x+3)}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4(x-2)}{(x^3-8)}$, d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^3-27}$

الحـــــــل:

نلاحظ أن المقام يكون صفرا عندما نعوض عن (x) ونلاحظ أيضا أن البسط أو المقام عبارة عن فرق مكعبين أو مجموع مكعبين؛

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-64}{12(x-4)} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x^2+4x+4^2)}{12(x-4)}$

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x^2+4x+4^2)}{12}$

$= \dfrac{1}{12}((4)^2+4(4)+16)$

$= \dfrac{1}{12}(16+16+16)$

$= \dfrac{1}{12}(48) = 4$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^3+27}{9(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+3^2)}{9(x+3)}$

$= \lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{9}((-3)^2-3(-3)+9)$

$= \frac{1}{9}(9+9+9) = \frac{27}{9} = 3$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{4(x-2)}{(x^3-8)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+2^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{4}{(x^2+2x+2^2)}$

$= \frac{4}{((2)^2+2(2)+2^2)} = \frac{4}{(4+4+4)}$

$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^3-27} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+3^2)}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{(x^2+3x+3^2)}$

$= \frac{1}{((3)^2+3(3)+9)} = \frac{1}{(9+9+9)} = \frac{1}{27}$

مثـــال (3.20): أوجد النهايات التالية:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{x^4-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{x^3-1}$, d) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}$

الحـــــل:

أولا: لاحظ المقام!

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} (x^2+x+1) = ((1)^2+(1)+1) = 3$

b)

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{x^4-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{(x^2-1)}{x}}{x^4-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{x(x^4-1)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{1((1)^2 + 1)} = \frac{1}{2}$$

c)
$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \frac{1}{x}}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x^3 - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x(x^3 - 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)}{x(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{(1 + 1)}{1((1)^2 + 1 + 1)} = \frac{2}{3}$$

d)
$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{5x}}}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{5x}\,(x - 5)}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{5x}\,(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})}{(\sqrt{x} - \sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x \to 5} \sqrt{5x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{5(5)}\,(\sqrt{5} + \sqrt{5}) = 5\,(2\sqrt{5}) = 10\sqrt{5}$$

مثـــال (3.21): أوجد النهايات التالية:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$, b) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 9x}{3x}$, d) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

الحـــــل:

نلاحظ أنه في هذه الحالات يكون المقام صفرا، فعليه نحاول أن نحلل البسط، وبالتالي نتخلص من المقام.

a)

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+1)$$

$$= ((3)+1) = 4$$

b)

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to -3} (x-1)$$

$$= ((-3)-1) = -4$$

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 9x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x(x-3)}{3x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (x-3)$$

$$= ((0)-3) = -3$$

d)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+3)$$

$$= ((2)+3) = 5$$

مثـــــال (3.22): أوجد النهايات الآتية:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x}$, b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 2}$

الحـــــــل:

a)

عندما نعوض عن (x) بـــ (∞)، فإننا نحصل على التالي:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x} = \left[\frac{(\infty)^2 + 1}{(\infty)^3 + \infty} \right] = \frac{\infty}{\infty}$$

أي أن النهاية غير معرفة، ولذلك في هذه الحالة نلجأ إلى قسمة البسط والمقام على أكبر أس في "المقام" وهو (x^3)، كالآتي:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{(\infty)^3}}{1 + \frac{1}{(\infty)^2}} \right]$$

$$= \frac{0+0}{1+0} = 0$$

b)

عندما نعوض عن (x) بـ $(-\infty)$، فإننا نحصل على الآتي:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+2}=\left[\frac{2(-\infty)^2+(-\infty)-1}{3(-\infty)^2+2}\right]=\frac{\infty}{\infty}$$

وهي نهاية غير معرفة، ولذلك نلجأ إلى قسمة البسط والمقام على أكبر أس في "المقام" وهو (x^2)، أي:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\left[\frac{2+\frac{1}{(-\infty)}-\frac{1}{(-\infty)^2}}{3+\frac{2}{(-\infty)^2}}\right]$$

$$=\left[\frac{2+0-0}{3+0}\right]=\frac{2}{3}$$

مثـــــال (3.23): أوجد النهايات الآتية:

a) $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2+|x|}$, b) $\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x^2+|x|}$

c) $\lim_{x\to-7^+}\frac{x+7}{|x+7|}$, d) $\lim_{x\to-7^-}\frac{x+7}{|x+7|}$

الحــــــل:

لاحظ أن المقام يصبح صفرا؛

a) $$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2+|x|}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x^2+(x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x+1)}$$

$$=\frac{1}{(0)+1}=\frac{1}{1}=1$$

b) $$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x^2+|x|}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x^2+(-x)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

c) $\lim\limits_{x\to -7^+} \dfrac{x+7}{|x+7|} = \lim\limits_{x\to -7^+} \dfrac{x+7}{+(x+7)}$

$= \lim\limits_{x\to -7^+} 1 = 1$

d) $\lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{x+7}{|x+7|} = \lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{x+7}{-(x+7)}$

$= \lim\limits_{x\to -7^-} \dfrac{1}{-1} = -1$

مثـــال (3.24): أوجد نهاية الدالة الآتية إن وُجدت:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 1 \\ x+4 & , \quad x>1 \end{cases}$$

الحـــل:

نجد أولا $\left[\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right]$ حيث $(x\le 1)$، فنبحث عن نهاية الدالة عندما تقترب (x) من (1)، ولكنها دائما أقل من (1)، أي أن:

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 = (1)^2 = 1 = L$$

ولكن عندما تكون $(x>1)$، فإننا نبحث عن نهاية الدالة عندما تقترب (x) من (1)، ولكنها دائما أكبر من (1)، أي:

$$\lim_{x\to 1^+} (x+4) = ((1)+4) = 5 = R$$

وحيث أن:

$$L \ne R$$

فإن نهاية الدالة غير موجودة.

مثـــال (3.25): أوجد نهاية الدالة الآتية إن وُجدت:

$$\lim_{x\to 2} f(x) \quad , \quad f(x)=\begin{cases} 2x+5 & , \quad x\le 2 \\ 4x+1 & , \quad x>2 \end{cases}$$

الحـــل:

نجد نهاية الدالة أولا عندما تقترب (x) من (2)، ولكنها دائما تكون أصغر منها أو تساويها، أي:

$$\lim_{x\to 2^-} (2x+5) = (2(2)+5) = 4+5 = 9 = L$$

ونجد نهاية الدالة عندما تقترب (x) من (2)، ولكنها دائما أكبر منها، أي:

$$\lim_{x\to 2^{+}}(4x+1)=(4(2)+1)=8+1=9=R$$

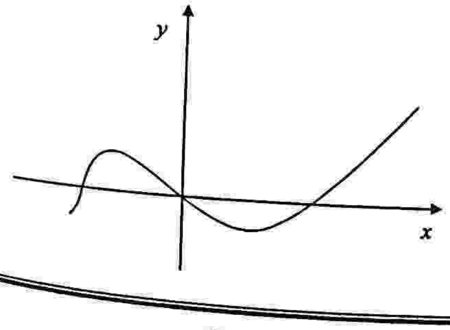
وحيث أن:

$$L=R$$

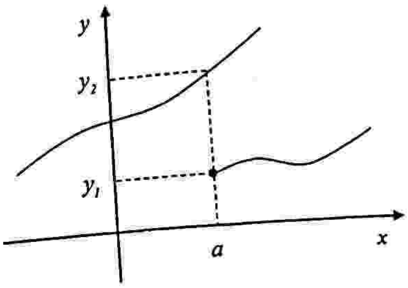
نستنتج أن نهاية الدالة موجودة، وهي (9).

(3.4) إستمرارية الدالة (continuity of the function)

نعني بإستمرارية الدالة أن الدالة لا يكون بها إنقطاع، أي أننا لو رسمنا الدالة بيانيا فإننا نستطيع رسمها دون أن نرفع القلم من على الورق كما في الشكل التالي:



أما إذا كان هناك إنقطاع كما في الشكل التالي:



فإن الدالة تكون غير مستمرة "غير متصلة" عند النقطة (a) حيث أنه حدث إنقطاع أي قفز للدالة عند النقطة (a) من (y_1) إلى (y_2).

لتكون الدالة مستمرة "متصلة" عند النقطة (a) يجب أن تتحقق الثلاث شروط التالية:

أولا: يجب أن تكون الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة (a)، بمعنى أن (a) تكون في نطاق الدالة $f(x)$، بمعنى أن $f(a)$ يجب أن تكون عدداً حقيقياً.

ثانيا: يجب أن تكون $\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$ موجودة.

ثالثا: يجب أن تكون:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

فإذا لم يتحقق شرط من الشروط السابقة فإن الدالة $f(x)$ تكون غير مستمرة "غير متصلة".

مثـــــال (3.26): أوجد عما إذا كانت الدالة:

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x^2-x-1}$$

مستمرة أم لا، عند:

a) $x=2$ ، b) $x=1$

الحـــــل:

a)

نتحقق من الشرط الأول؛ وهو هل الدالة معرفة عند النقطة $(x=2)$؟

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x^2-x-1}$$

$$f(2)=\frac{2(2)+1}{2(2)^2-(2)-1}=\frac{5}{5}=1$$

أي أن الشرط الأول قد تحقق، وهو أن $f(2)$ معرّفة وتساوى (1) عند $(x=2)$.

ثم نتحقق من الشرط الثاني، وهو هل $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ موجودة؟

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 2}\frac{2(2)+1}{2(2)^2-(2)-1}=\frac{5}{5}=1$$

أي أن الشرط الثاني قد تحقق أيضا، وهو أن: $\left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)$ موجودة.

وأخيرا نتحقق من الشرط الثالث، وهو هل:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

من تحقيقنا للشرطين الأول والثاني، وجدنا أن:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$$

وحيث أن الشروط الثلاث قد تحققت فإن هذا يعني أن الدالة $f(x)$ مستمرة "متصلة" عند النقطة $(x=2)$.

b)

بنفس الطريقة نبحث عما إذا كانت شروط الإستمرارية للدالة تنطبق على الدالة عند النقطة $(x=1)$ أم لا، ونبدأ بالشرط الأول، وهو هل $f(x)$ معرّفة عند النقطة $(x=1)$.

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x^2-x-1}$$

$$f(1)=\frac{2(1)+1}{2(1)^2-(1)-1}=\frac{3}{0}$$

وحيث أن المقام يساوى صفرا، فإن هذا يعني أن الدالة غير معرّفة عند النقطة $(x=1)$. وحيث أن أحد الشروط لإستمرارية الدالة لم يتوفر، فإن هذا يعني أن الدالة غير مستمرة "غير متصلة" عند النقطة $(x=1)$.

مثـــال (3.27): أوجد عما إذا كانت الدالة التالية مستمرة أم لا عند النقطة $(x=3)$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & , \quad x\neq 3\\ 6 & , \quad x=3\end{cases}$$

الحـــــل:

نتحقق من الشرط الأول:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=x+3$$

$$f(3)=(3)+3=6$$

أي أن الدالة معرّفة عند النقطة $(x=3)$.

الشرط الثاني:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)$$

$$=((3)+3)=6$$

إذن، تحقق الشرط الثاني، وهو أن نهاية للدالة موجودة.

الشرط الثالث:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=6$$

الشرط الثالث أيضا قد تحقق.

أي أن الدالة مستمرة "متصلة" عند النقطة $(x=3)$.

مثـــال (3.28): تحقق عما إذا كانت الدالة التالية مستمرة عند النقطة $(x=2)$:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2}{x-2}$$

الحـــل:

الشرط الأول:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2}{x-2}$$

$$f(2)=\frac{(2)^3-4(2)^2}{(2)-2}=\frac{8-16}{0}=\frac{-8}{0}$$

أي أن الدالة غير معرّفة عند النقطة $(x=2)$، أي أن الدالة غير مستمرة "غير متصلة" عند هذه النقطة.

مثـــال (3.29): تحقق عما إذا كانت الدالة التالية مستمرة عند النقطة $(x=0)$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\neq 0 \\ 2 & , \quad x=0 \end{cases}$$

الحـــل:

الشرط الأول؛ عند $(x=0)$:

$$f(x)=2$$

$$f(0)=2$$

تحقق الشرط الأول.

الشرط الثاني:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)$$

$$=((0)^2+1)=1$$

الشرط الثاني أيضا تحقق.

الشرط الثالث:

$$\lim_{x\to 0}(x^2+1)=(0)^2+1=1$$

$$f(0)=2$$

أي أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$$

أي أن الشرط الثالث لم يتحقق.

أي أن الدالة غير مستمرة "غير متصلة" عند النقطة $(x=0)$.

مثـــال (3.30): تحقق عما إذا كانت الدالة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x\neq 2 \\ 5x-6 & , \quad x=2 \end{cases}$$

متصلة "مستمرة" أم لا عند النقطة $(x=2)$.

الحــــل:

الشرط الأول:

$$f(x)=5x-6$$

$$f(2)=5(2)-6=10-6=4$$

أي أن الدالة معرّفة.

الشرط الثاني:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$=((2)+2)=4$$

أي أن هذا الشرط قد تحقق وهو أن نهاية الدالة موجودة.

الشرط الثالث:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$$

أي أن الدالة مستمرة عند النقطة $(x=2)$.

مثـــال (3.31): أوجد قيمة الثابت (k) الذي يجعل الدالة التالية مستمرة.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} & , \quad x\neq 1 \\ 2k-5 & , \quad x=1 \end{cases}$$

الحــــل:

أولا نجد نهاية الدالة:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+2)}{(x-2)}$$

$$= \frac{(1)+2}{(1)-2} = \frac{3}{-1} = -3$$

ولكي تكون الدالة متصلة عند النقطة $(x=1)$ يجب أن تكون:

$$2k^2 - 5 = -3$$

$$2k^2 = 2$$

$$k^2 = 1$$

$$k = \pm 1$$

مثـــال (3.32): أوجد قيمة الثابت (k) حتى تكون الدالة التالية متصلة عند النقطة $(x=-1)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+4x^2+2x}{(x+1)^2} & , \quad x \neq -1 \\ k^2-4k+1 & , \quad x = -1 \end{cases}$$

الحـــل:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2x(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2x(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x \to -1} 2x = 2(-1) = -2$$

ولكي تكون الدالة متصلة عند النقطة $(x=-1)$ يجب أن تكون:

$$k^2 - 4k + 1 = -2$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

أي أن، إما:

$$(k-1) = 0 \Rightarrow k = 1$$

أو:

$$(k-3) = 0 \Rightarrow k = 3$$

أمثلة متنوعة (3)

مثال (1): أوجد النهايات للدوال التالية:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$$

الحل:

> **ملاحظة:**
> إذا كان المقام يساوى صفرا، تخلص من المقام بطريقة ما، مثل التحليل.

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}(2x+1)$$

$$=(2(2)+1)=4+1=5$$

$$b)\ \lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{x-25}=\lim_{x\to 25}\frac{(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)}$$

$$=\lim_{x\to 25}\frac{1}{(\sqrt{x}+5)}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{25}+5)}=\frac{1}{5+5}=\frac{1}{10}$$

مثال (2): أوجد النهايات للدالتين التاليتين:

$$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{5x-6}{2x+1} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$$

الحل:

$$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{5x-6}{2x+1}=\frac{5(3)-6}{2(3)+1}=\frac{15-6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$b)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-3)$$

$$=((-2)-3)=-5$$

مثـــال (3): أوجد النهايات للدالتين التاليتين:

$$a)\ \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} \quad , \quad b)\ \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2-4}$$

الحـــل:

$$a)\ \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{5})} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$b)\ \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2-4} = \sqrt{(3)^2-4} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

مثـــال (4): أوجد نهاية الدالتين التاليتين:

$$a)\ \lim_{x \to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{x^3-1} \quad , \quad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

الحـــل:

$$a)\ \lim_{x \to 1} \frac{x-\frac{1}{x}}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{(x^3-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)}{x(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{((1)+1)}{1((1)^2+(1)+1)} = \frac{2}{3}$$

$$b)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$$

نضرب في مرافق البسط،

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{(0)+4}+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

مثـــال (5): أوجد نهاية الدالتين التاليتين:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{7x-4} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+4}{4x^5-2x^2-5}$$

الحـــل:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{5x+2}{7x-4}$$

بالتعويض المباشر نجد أن النهاية $(\frac{\infty}{\infty})$ أي غير معرّفة، فنقسم البسط والمقام على (x)؛

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{7x}{x}-\frac{4}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{2}{x}}{7-\frac{4}{x}}$$

$$=\frac{5+\frac{2}{\infty}}{7-\frac{4}{\infty}}=\frac{5+0}{7-0}=\frac{5}{7}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-3x+4}{4x^5-2x^2-5}$$

بالتعويض المباشر تكون النهاية $(\frac{\infty}{\infty})$، فنقسم البسط والمقام على أكبر أس في المقام.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^5}-\frac{3x}{x^5}+\frac{4}{x^5}}{\frac{4x^5}{x^5}-\frac{2x^2}{x^5}-\frac{5}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}+\frac{4}{x^5}}{4-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^5}}$$

$$=\left(\frac{0-0+0}{4-0-0}\right)=\frac{0}{4}=0$$

مثـــال (6): أثبت أن الدالة التالية غير متصلة عند النقطة $(x=-4)$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x-4}{x+4} & , \quad x\neq-4\\ 2x^2+1 & , \quad x=-4\end{cases}$$

الحـــل:

$$f(x)=2x^2+1$$

$$f(4)=2(-4)^2+1=2\times16+1=33$$

أي أن $f(x)$ معرّفة عند النقطة $(x=-4)$.

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^2+3x-4}{x+4} = \lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)}$$

$$= \lim_{x \to -4} (x-1)$$

$$= (-4-1) = -5$$

أي أن نهاية الدالة معرّفة أيضا، ولكن:

$$\lim_{x \to -4} f(x) \neq f(-4)$$

أي أن الدالة غير متصلة عند النقطة $(x=-4)$.

مثـــــال (7): أثبت أن الدالة التالية غير متصلة عند $(x=3)$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ x^3 & , \quad x=3 \end{cases}$$

الحـــــــــل:

$$f(x)=x^3$$

$$f(3)=(3)^3=27$$

أي أن $f(x)$ معرّفة عند النقطة $(x=3)$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2+3x+9)$$

$$= ((3)^2+3(3)+9)$$

$$= (9+9+9) = 27$$

أي أن النهاية معرّفة أيضا عند النقطة $(x=3)$

وحيث أن:

$$\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

أي أن الدالة غير متصلة عند النقطة $(x=3)$.

مثـــــال (8): أثبت أن الدالة التالية متصلة عند النقطة $(x=1)$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 3 & , \quad x=1 \end{cases}$$

الحـــــــل:

$$f(x)=3$$

$$f(1)=3$$

أي أن $f(x)$ معرّفة،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)$$

$$=((1)^2+(1)+1)=3$$

أي أن $(\lim_{x\to 1} f(x))$ معرّفة.

أيضا:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=3$$

أي أن الدالة متصلة عند النقطة $(x=1)$.

مثـــال (9): أوجد قيمة الثابت (k) حتى تكون الدالة التالية متصلة عند النقطة $(x=1)$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ 3k-1 & , \quad x=1\end{cases}$$

الحـــــــل:

$$f(x)=3k-1$$

$$f(1)=3k-1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$=((1)+1)=2$$

لتكون الدالة متصلة عند النقطة $(x=1)$ يجب أن يتحقق التالي:

$$3k-1=2$$

$$3k=3$$

$$k=1$$

مثـــال (10): أوجد قيمة الثابت (k) الذي يجعل الدالة متصلة عند النقطة $(x=-1)$:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1} & , \quad x\neq -1 \\ k^2+2kx^3 & , \quad x=-1 \end{cases}$$

الحــــــل:

$$f(x)=k^2+2kx^3$$

$$f(-1)=k^2+2k(-1)^3=k^2-2k$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)$$

$$=((-1)^2-(-1)+1)$$

$$=(1+1+1)=3$$

لتكون الدالة متصلة عند النقطة $(x=-1)$ يجب أن يتحقق التالي:

$$k^2-2k=3$$

$$k^2-2k-3=0$$

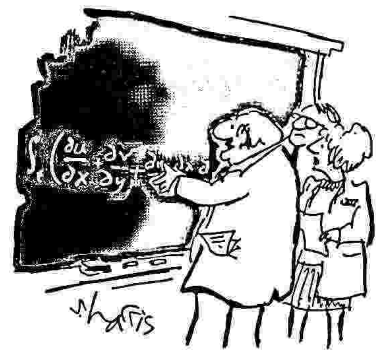
$$(k-3)(k+1)=0$$

أي أن:

$$(k-3)=0 \Rightarrow k=3$$

أو:

$$(k+1)=0 \Rightarrow k=-1$$



وهذه فلسفتي في الحياة !!

مسائل (3)

بعض الملاحظات لإيجاد النهايات:

1. أبدأ بإيجاد نهاية الدالة بالتعويض المباشر.
2. إذا كانت النتيجة كمية غير معرّفة، أي أن المقام صفرّ، إستخدم التحليل للتخلص من المقام.
3. إذا كان في الدالة "جذر" نضرب في مرافق الجذر.
4. إذا كانت نتيجة التعويض المباشر $(\frac{\infty}{\infty})$، فإننا نقسم البسط والمقام على أعلى أس لـــ (x) في "المقام".

مسألة (1): أوجد النهايات للدوال التالية: [تعويض مباشر]

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x + 1)$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+4}{x^3 - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^4}{x - 3}$, d) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2x^3 + 9}{x}$

مسألة (2): أوجد النهايات للدوال التالية: [إستخدام التحليل]

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{4(x+2)}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{7(x-3)}{(x^3 - 27)}$, d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$

مسألة (3): أوجد النهايات للدوال التالية: [الضرب في المرافق]

a) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-6} - 2}{(x - 5)}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}$

مسألة (4): أوجد النهايات للدوال التالية: [القسمة على أكبر أس في المقام]

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3 + 5x^2}{x^4 - x^3 + 3}$, b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7 - 5x^2}{4x^2 - 2x - 12}$

مسألة (5): أوجد النهايات للدوال التالية:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (-4.3)$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x}{2x}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8}$, d) $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$

مسألة (6): أوجد نهايات الدوال التالية:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 - 3x + 9}{x^3 - 5x^2 - 8}$, b) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 2}{2x^3 - 9}$

c) $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 12)$, d) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{2x}$

مسألة (7): أوجد نهايات الدوال التالية:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$, b) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 5x - 3}{x - 4}$

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 8}{5x^2 - 7}$, d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 + 2x - 4}{3x^4 + 2x + 7}$

مسألة (8): أوجد نهايات الدوال التالية:

a) $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x - 1} - 2}$, b) $\lim_{x \to 8} \frac{x^{2/3} - 4}{x - 8}$

c) $\lim_{x \to \infty} \left(4 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)$, d) $\lim_{x \to 3/4} \frac{16x^2 - 9}{8x - 6}$

مسألة (9): أوجد نهاية الدالة التالية إن وُجدت:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x+3 & , \quad x<0 \\ 4 & , \quad x \ge 0 \end{cases}$$

مسألة (10): أوجد نهاية الدالة التالية إن وُجدت:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \quad , \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x<1 \\ x+1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

مسألة (11): تحقق عما إذا كانت الدالة التالية مستمرة عند النقطة $(x=-2)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x+2} & , \quad x \ne -2 \\ 7 & , \quad x = -2 \end{cases}$$

مسألة (12): تحقق عما إذا كانت الدالة التالية مستمرة عند النقطة $(x=2)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , \quad x \ne 2 \\ 4 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

مسألة (13): أوجد قيمة الثابت (k) الذي يجعل الدالة التالية مستمرة عند النقطة $(x=1)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ k^2-4x & , \quad x=1\end{cases}$$

مسألة (14): أوجد قيمة الثابت (k) الذي يجعل الدالة التالية مستمرة عند النقطة $(x=2)$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & , \quad x\neq 2\\ k^2-2k-1 & , \quad x=2\end{cases}$$

إجابات (3)

1-a) 7   1-b) -2 1-c) $-\frac{16}{5}$ 1-d) 15

2-a) -6 2-b) 3   2-c) $\frac{7}{27}$ 2-d) $\frac{1}{9}$

3-a) $\frac{1}{2}$ 3-b) 2

4-a) 0   4-b) $-\frac{5}{4}$

5-a) -4.3 5-b) 2   5-c) $\frac{1}{2}$ 5-d) 14

6-a) 5   6-b) 0   6-c) -4 6-d) 3

7-a) $\frac{27}{4}$ 7-b) -3 7-c) $\frac{\infty}{\infty}$ 7-d) ∞

8-a) 4   8-b) $\frac{1}{3}$ 8-c) 4   8-d) 3

9) لا توجد

10) 2 "توجد"

11) الدالة غير مستمرة

12) الدالة مستمرة

13) ± 1

14) $4, -2$

4

التفاضل

Differentiation

(4.1) إيجاد تفاضل دالة
(finding a derivative of a function)

إذا كانت النقطة (x) في نطاق الدالة $f(x)$ ، فإن تفاضل $f(x)$. ، أو المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ – والذى يُرمز له بالرمز $f'(x)$ عند (x) – يُعرَف كالتالي:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

على شرط أن تكون النهاية موجودة عندما تقترب (h) من الصفر.

ولإيجاد تفاضل $f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

أ- نكتب $f(x)$ ونكتب $f(x+h)$.

ب- نكتب العلاقة $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

جـ - نجد $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، فإذا كانت موجودة، فإنها تكون تفاضل $f(x)$ عند النقطة (x).

وسنوضح الخطوات السابقة لإيجاد تفاضل دالة بعدة أمثلة.

مثـــــال (4.1): أوجد تفاضل الدالة "أو المشتقة الأولى" للدالة التالية:

$$f(x)=x^2$$

الحـــــل:

الخطوة الأولى:

$$f(x)=x^2$$

$$f(x+h)=(x+h)^2$$

الخطوة الثانية:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2-(x^2)}{h}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$

$$=\frac{2hx+h^2}{h}$$

$$=\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$=(2x+h)$$

الخطوة الثالثة:

$$\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x+0=2x$$

أي أن:

$$f'(x)=2x$$

مثـــــال (4.2): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=4x^2$$

الحـــــل:

مباشرة نكتب تعريف المشتقة الأولى:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x^2+2hx+h^2)-4x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x^2+8hx+4h^2-4x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(8x+4h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(8x+4h)$$

$$=8x+4(0)=8x$$

أي أن:

$$f'(x)=8x$$

مثـــــال (4.3): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=3x^2+5$$

الحــــــل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2+5]-[3x^2+5]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[3(x^2+2hx+h^2)+5]-[3x^2+5]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6hx+3h^2+5-3x^2-5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x+3h)$$

$$=6x+3(0)=6x$$

أي أن:

$$f'(x)=6x$$

مثـــــال (4.4): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=x^3$$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x^3} + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) - \cancel{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3hx + h^2)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2)$$

$$= 3x^2 + 3(0)x + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

أي أن:

$$f'(x) = 3x^2$$

مثال (4.5): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

بالضرب في مرافق البسط:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cancel{x} + h) - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+(0)}+\sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

أي أن:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثـــــال (4.6): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = x^2 + 3x$$

الحـــــــل:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^2 + 3(x+h) - (x^2+3x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 3x + 3h - x^2 - 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x+h+3)$$

$$=(2x+(0)+3) = 2x+3$$

أي أن:

$$f'(x) = 2x+3$$

مثـــــال (4.7): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

الحـــــــل:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x+h)+1} - \sqrt{x+1}}{h}$$

بالضرب في مرافق البسط:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)+1}-\sqrt{x+1}}{h}\times\frac{\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h+\cancel{1})-(\cancel{x}+\cancel{1})}{h(\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{(x+h)+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+(0)+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

أي أن:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

مثـــال (4.8): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=\sqrt{2x-3}$$

الحـــل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{(x+h)-3}-\sqrt{2x-3}}{h}$$

بالضرب في مرافق البسط:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-3}-\sqrt{2x-3}}{h}\times\frac{\sqrt{2(x+h)-3}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2(x+h)-3}+\sqrt{2x-3}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)-3]-(2x-3)}{h(\sqrt{2(x+h)-3}+\sqrt{2x-3})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{2x}+2h-\cancel{3}-\cancel{2x}+\cancel{3}}{h(\sqrt{2(x+h)-3}+\sqrt{2x-3})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{2(x+h)-3}+\sqrt{2x-3})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\sqrt{2(x+h)-3}+\sqrt{2x-3}}$$

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{2(x+0)-3}+\sqrt{2x-3}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2x-3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

أي أن:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

مثـــال (4.9): أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$f(x)=\frac{4}{x}$$

الحـــل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(\frac{1}{x+h})-\frac{4}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{4}{x+h}-\frac{4}{x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{4x-4(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\cancel{4x}-\cancel{4x}-4h}{x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\left[\frac{-4\cancel{h}}{x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{-4}{x(x+h)}\right]$$

$$=\frac{-4}{x(x+0)}=-\frac{4}{x^2}$$

أي أن:

$$f'(x)=-\frac{4}{x^2}$$

(4.2) قواعد لإيجاد المشتقة الأولى

(rules for finding first derivative)

في الأمثلة السابقة وجدنا المشتقة الأولى للدالة بإستخدام المبادئ الأولية للتفاضل. ومن خلال إستقرائنا لحل الأمثلة يمكن أن نستنتج بعض القواعد العامة وهي:

1. إذا كانت $f(x)$ دالة ثابته، أي أن $(f(x)=c)$، حيث (c) مقدارثابت، فإن $(f'(x)=0)$.

مثلا:

$$f(x)=14 \quad , \quad f'(x)=0$$

$$f(x)=-5 \quad , \quad f'(x)=0$$

2. إذا كانت $(f(x)=\alpha x)$، حيث (α) مقدارثابت، فإن $(f'(x)=\alpha)$.

مثلا:

$$f(x)=5x \quad , \quad f'(x)=5$$

$$f(x)=-4x \quad , \quad f'(x)=-4$$

3. إذا كانت $(f(x)=x^n)$، حيث (n) عدد موجب، فإن $(f'(x)=n x^{n-1})$.

مثلا:

$$f(x)=x^3 \quad , \quad f'(x)=3x^{3-1}=3x^2$$

$$f(x)=4x^5 \quad , \quad f'(x)=4(x^{5-1})=20x^4$$

4. إذا كانت $(f(x)=x^{-n})$، حيث (n) عدد موجب، فإن $(f'(x)=-n x^{-n-1})$.

مثلا:

$$f(x)=x^{-4} \quad , \quad f'(x)=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}$$

$$f(x)=-3x^{-2} \quad , \quad f'(x)=-3(-2x^{-2-1})=6x^{-3}$$

5. تفاضل حاصل ضرب دالتين $f(x)$، و$g(x)$ هو: $(f\,g)'=f\,g'+g\,f'$.

[أي أن تفاضل حاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى]

مثلا:

$$f(x)=(3x+1)(2x^2-2)$$

$$f'(x)=(3x+1)(4x)+(2x^2-2)(3)$$

$$=12x^2+4x+6x^2-6$$

$$=18x^2+4x-6$$

6. تفاضل حاصل قسمة دالتين $f(x)$، و $g(x)$ هو:

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{g\,f' - f\,g'}{g^2}.$$

أي أن:

تفاضل حاصل قسمة دالتين = (المقام× تفاضل البسط− البسط × تفاضل المقام) / مربع المقام

مثلا:

$$\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{(3x-1)}{x^2}$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{(x^2)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{3x^2-6x^2+2x}{x^4}$$

$$=\frac{-3x^2+2x}{x^4}$$

بقسمة البسط والمقام على (x)؛

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{-3x+2}{x^3}$$

7. تفاضل مجموع دالتين $f(x)$، و $g(x)$ هو:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$

مثلا:

$$f(x)=8x^3 \quad , \quad g(x)=-2x^4$$

$$[f(x)+g(x)]' = (8x^3)'+(-2x^4)'$$

$$=24x^2-8x^3$$

•••••••••••

الرمز الأكثر شيوعا لتفاضل الدالة $f(x)$ هو $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ فمثلا إذا كانت:

$$y=f(x)$$

فإن:

$$dy=f'(x)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

وأحيانا نرمز لـ $\left[\frac{dy}{dx}\right]$ بالرمز (y')، أي أن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

فمثلا:

$$y = f(x) = x^4 - 5x + 4$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x^3 - 5$$

(4.3) أمثلة لإيجاد المشتقة الأولى بإستخدام قواعد التفاضل

مثـــال (4.10): أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

a) $y = f(x) = (x+1)(x^2+1)$

b) $y = f(x) = \frac{x^3+6}{x}$

c) $y = f(x) = (x^4 - 5x - 8)^3$

الحـــل:

a) $y = (x+1)(x^2+1)$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (x+1)(2x) + (x^2+1)(1)$$

$$= 2x^2 + 2x + x^2 + 1$$

$$= 3x^2 + 2x + 1$$

b) $y = f(x) = \frac{x^3+6}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x(3x^2) - (x^3+6)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{3x^3 - x^3 - 6}{x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 6}{x^2}$$

c) $y = f(x) = (x^4 - 5x - 8)^3$

لإيجاد المشتقة الأولى، نفاضل الأس أولا، ثم نفاضل داخل القوس:

$$\frac{dy}{dx}=y'=3(x^4-5x-8)^2(4x^3-5)$$

مثــــال (4.11): أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية عند $(x=3)$:

a) $y=f(x)=5x^3-2x+8$

b) $y=f(x)=x+\frac{1}{x}$

c) $y=f(x)=(x^2-1)^4$

d) $y=f(x)=(x^2-2x+1)^3$

الحـــــل:

a)

$$y=f(x)=5x^3-2x+8$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=15x^2-2$$

عند $(x=3)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3=15(3)^2-2=15\times9-2=133$$

b) $y=f(x)=x+\frac{1}{x}=x+x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=1-x^{-2}=1-\frac{1}{x^2}$$

عند $(x=3)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3=1-\frac{1}{(3)^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

c) $y=f(x)=(x^2-1)^4$

$$\frac{dy}{dx}=y'=4(x^2-1)^3(2x)$$

$$=8x(x^2-1)^3$$

عند $(x=3)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3=8(3)((3)^2-1)^3=24(9-1)^3$$

$$=24(8)^3=12288$$

d) $y = f(x) = (x^2 - 2x + 1)^3$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 3(x^2 - 2x + 1)^2(2x - 2)$$

عند $(x = 3)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 = 3(9 - 6 + 1)^2(6 - 2)$$

$$= 192$$

مثــــال (4.12): أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

a) $y = \sqrt{5x}$

b) $y = \dfrac{1}{(x^2 + x)^4}$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

الحــــــل:

a) $y = \sqrt{5x} = (5x)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2}(5x)^{\frac{1}{2}-1}(5)$$

$$= \frac{5}{2}(5x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

b) $y = \dfrac{1}{(x^2 + x)^4} = (x^2 + x)^{-4}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -4(x^2 + x)^{-4-1}(2x + 1)$$

$$= -4(x^2 + x)^{-5}(2x + 1)$$

$$= -4\frac{(2x + 1)}{(x^2 + x)^5}$$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sqrt{1 - x^2}(1) - x(\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{(1 - x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{\sqrt{1-x^2}-x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}-x^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}$$

$$=\frac{\frac{(1-x^2)+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}$$

$$=\frac{(1-\cancel{x^2})+\cancel{x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(4.4) قاعدة السلسلة (chain rule)

إذا كانت (f) و (g) دالتين قابلتين للتفاضل، حيث:

$$y=f(u)\qquad,\qquad u=g(x)$$

وكانت $g(x)$ في نطاق الدالة (f)، فإن:

$$y=f(u)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$$

أي أن (y) دالة في المتغير (x)، ويمكننا أن نفاضل (y) بالنسبة لـ (x) كالتالي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

والمعادلة الأخيرة تُعرف بقاعدة السلسلة.

مثـــال (4.13): إذا كانت:

$$y=u^3\qquad,\qquad u=x^2+1$$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{d}{du}(u^3)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$=3u^2\cdot 2x$$

بالتعويض عن (u)؛

$$\frac{dy}{dx}=3(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2$$

مثال (4.14): إذا كانت:

$$y=(1+z^2)^3 \qquad , \qquad z=\sqrt{x}$$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dz}(1+z^2)^3\cdot\frac{d}{dx}(x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=3(1+z^2)^2\,(2z)\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

بالتعويض عن (z)؛

$$\frac{dy}{dx}=3(1+(\sqrt{x})^2)^2\cdot\frac{(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})}$$

$$=3(1+x)^2$$

مثال (4.15): إذا كانت:

$$y=(u+1)^{\frac{1}{2}} \qquad , \qquad u=\frac{1}{x^2}$$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}(u+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(\frac{1}{x^2})$$

$$=\frac{1}{2}(u+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2\frac{1}{x^3})$$

$$=-\frac{1}{x^3}(u+1)^{-\frac{1}{2}}$$

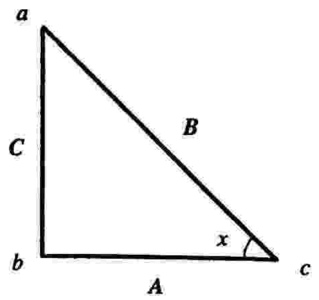
بالتعويض عن (u)؛

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^3}(\frac{1}{x^2}+1)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^3}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}$$

$$=-\frac{1}{x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}}=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

(4.5) الدوال المثلثية (trigonometric function)

نعرّف الدوال المثلثية بإستخدام المثلث (abc) القائم الزاوية في (b).



$$\sin x=\frac{C}{B} \quad , \quad \csc x=\frac{B}{C}=\frac{1}{\sin x}$$

$$\cos x=\frac{A}{C} \quad , \quad \sec x=\frac{C}{A}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x=\frac{A}{B} \quad , \quad \cot x=\frac{B}{A}=\frac{1}{\tan x}$$

وهناك بعض المتطابقات المثلثية نذكر أهمها دون برهان:

(1) $\sin(-x)=-\sin x$

(2) $\cos(-x)=\cos x$

(3) $\tan(-x)=-\tan x$

(4) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

(5) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(6) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

(7) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(8) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

....

تفاضل الدول المثلثية:

- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

مثال (4.16): فاضل الدوال المثلثية التالية:

a) $f(x) = 3\sin^2 x$, b) $f(x) = 2\cos^3 x$

c) $f(x) = \sin(4x^3)$, d) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

الحل:

a) $y = f(x) = 3\sin^2 x$

نفاضل الأس أولا، ثم نفاضل الدالة المثلثية؛

$$y' = 3(2\sin x)\cos x = 6\sin x \cos x$$

b) $y = f(x) = 2\cos^3 x$

نفاضل الأس أولا، ثم نفاضل الدالة المثلثية؛

$$y' = 2(3\cos^2 x)(-\sin x) = -6\cos^2 x \sin x$$

c) $y = f(x) = \sin(4x^3)$

نفاضل الدالة أولا، ثم نفاضل الزاوية؛

$$y' = \cos(4x^3)(12x^2) = 12x^2 \cos(4x^3)$$

d) $y = f(x) = 2\sin x + \cos 2x$

$$y' = 2(\cos x) + (-\sin 2x)(2)$$

$$= 2\cos x - 2\sin 2x$$

مثـــــال (4.17): فاضل الدوال المثلثية التالية:

a) $f(x) = \sin(8x+3)$, b) $f(x) = \sec\sqrt{x-1}$

c) $f(x) = \cot(x^3 - 2x)$, d) $f(x) = x\cos x$

الحــــــــل:

a) $f(x) = \sin(8x+3)$

نفاضل الدالة المثلثية أولا، ثم نفاضل الزاوية؛

$$y' = \cos(8x+3)(8) = 8\cos(8x+3)$$

b) $f(x) = \sec\sqrt{x-1}$

نفاضل الدالة المثلثية أولا، ثم نفاضل الزاوية؛

$$y' = (\sec\sqrt{x-1}\tan\sqrt{x-1})\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\sec\sqrt{x-1}\tan\sqrt{x-1}$$

c) $f(x) = \cot(x^3 - 2x)$

نفاضل الدالة المثلثية أولا، ثم نفاضل الزاوية؛

$$y' = -\csc^2(x^3 - 2x)(3x^2 - 2)$$

$$= -(3x^2 - 2)\csc^2(x^3 - 2x)$$

d) $f(x) = x\cos x$

هذه تفاضل حاصل ضرب دالتين؛

$$y' = x(-\sin x) + \cos x(1)$$

$$= \cos x - x\sin x$$

(4.6) الدوال الأسية واللوغاريتمية

(exponential and logarithmic functions)

تعرّف الدالة الأسية (f) التي يكون أساسها (a) كالتالي:

$$f(x)=y=a^{x}$$

حيث (a) عدد موجب أي $(a>0)$، ولكنها لا تساوي (1) $(a\neq 1)$.

ففي الدوال التالية:

$$f(x)=2^{x} \quad , \quad f(x)=10^{x-1} \quad , \quad f(x)=(\frac{1}{3})^{x}$$

تكون (2) و (10) و $(\frac{1}{3})$ أساسا للدالة، أي أن كل دالة لها أساس موجب ثابت وأس متغير (x).

ولكن الدالة $(f(x)=x^{4})$ ليست أسية لأن أساسها (x) متغير، والدالة $(f(x)=(-3)^{x})$ ليست أسية لأن أساسها سالب، والدالة $(f(x)=(1^{x}))$ ليست أسية لأن الواحد الصحيح مرفوع لأي أس، يبقى واحد صحيحاً، أي $(f(x)=(1^{x}))$ دالة ثابته.

هناك عدد غير قياسى يظهر دائما في الدوال الأسية وهو العدد (e)، والذى يُعرّف كالتالى:

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=2.17828\,.....\approx 2.72$$

وتُسمى الدالة:

$$f(x)=e^{x}$$

بالدالة الأسية الطبيعية.

> ملاحظة:
> نطاق الدالة الأسية هو كل الأعداد الحقيقية $(-\infty,+\infty)$. ومدى الدالة الأسية هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة $(0,+\infty)$.

....

الدالة العكسية للدالة الأسية تُعرّف كالتالى:

إذا كانت $(x=a^{y})$ وكانت $(a>0)$ ولا تساوي (1)، فإن:

$$y=\log_{a}x$$

وتُقرأ لوغاريتم ذو الأساس (a) للمتغير (x). فمثلا لإيجاد قيمة (x) في المعادلة التالية:

$$\ell og_4 x = \frac{5}{2}$$

حيث (a) أساس اللوغاريتم؛ نعبر عن اللوغاريتم بالدالة الأسية كالتالي:

$$x=(4)^{\frac{5}{2}}=(4^{\frac{1}{2}})^5=(\sqrt{4})^5=(2)^5=32$$

يوجد أساس شائع للوغريتمات وهو الأساس (10)، فنكتب لوغاريتم (x) ذا الأساس (10) $(\ell og_{10}x)$ أو إختصاراً $(\ell og\, x)$، حيث أهملنا كتابة الرقم (10).

كما يوجد أساس آخر للوغاريتم وهو الأساس (e)، وفي هذه الحالة يُسمى اللوغاريتم باللوغاريتم الطبيعي للمتغير (x) ويُكتب $(\ell n\, x)$.

ملاحظة:
نطاق اللوغاريتم هو كل الأعداد الحقيقية الموجبة $(0,+\infty)$، ومدى اللوغاريتم هو كل الأعداد الحقيقية $(-\infty,+\infty)$.

خواص اللوغاريتمات*:

1. $\ell og_a AB=\ell og_a A+\ell og_a B$
2. $\ell og_a \frac{A}{B}=\ell og_a A-\ell og_a B$
3. $\ell og_a A^n=n\,\ell og_a A$
4. $\ell og_a a=1$
5. $\ell og_a 1=0$

- هذه الخواص تنطبق على اللوغاريتمات ذات الأساس (10) أو الأساس (e).

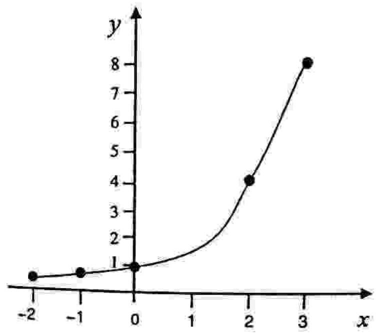
مثال (4.18): أرسم الدالة $(f(x)=2^x)$ بيانيا.

الحل:

$$f(x)=y=2^x$$

نلاحظ أن $(2^x>0)$ لكل قيم (x) أي أن $(y>0)$ ونلاحظ أيضا أن (2^x) تؤول إلى الصفر أي $(y\to 0)$ عندما تؤول (x) إلى سالب ما لا نهاية.

نرسم الدالة بإختيار عدة قيم للمتغير (x)، ونجد قيمة (y) المناظرة لها، ونرسم النتيجة بيانيا كما في الشكل التالي:



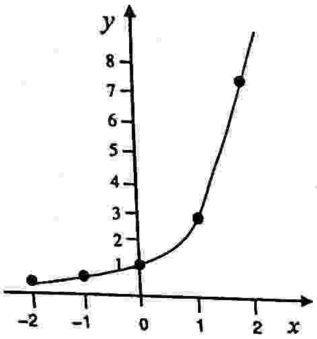
x	$y=f(x)$
−2	¼
−1	½
0	1
2	4
3	8

مثـــــال (4.19): أرسم الدالة $(f(x)=e^x)$ بيانيا.

الحـــــــل:

$$f(x)=y=e^x$$

هذا المثال لا يختلف عن المثال السابق غير أن الأساس في هذا المثال هو (e) ، والتي تساوي تقريبا (2.72). وبنفس الطريقة نرسم الدالة بيانيا.

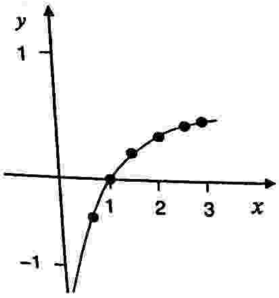


x	$y=f(x)$
−2	0.135
−1	0.368
0	1
1	2.72
2	7.3898

مثـــــال (4.20): أرسم الدالة $(f(x)=\ell og\ x)$ بيانيا.

الحـــــــل:

لرسم هذه الدالة يجب أن نلاحظ أن (x) دائما أكبر من الصفر، وبإختيار بعض القيم للمتغير (x) نجد $(\ell og\ x)$ ، ومنها نرسم الدالة بيانيا؛



x	$y=f(x)$
0.5	−0.30
1.0	0
1.5	0.18
2.0	0.30
2.5	0.40
3.0	0.48

تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية:

- $\frac{d}{dx}e^{x}=e^{x}$
- $\frac{d}{dx}e^{ax}=a\,e^{ax}$
- $\frac{d}{dx}a^{x}=a^{x}\,\ell og\,a$
- $\frac{d}{dx}a^{bx}=b\,a^{bx}\,\ell og\,a$
- $\frac{d}{dx}\ell og\,x=\frac{1}{x}$

مثـــــال (4.21): أوجد تفاضل الدالة:

$$y=x^{3}\,e^{x}$$

الحـــــــل:

هذه الدالة هي حـــاصل ضـــرب دالتين، أي أن تفاضلها يكون [الأولى × تفاضل الثانية + الثانية × تفاضل الأولى]

$$\frac{dy}{dx}=y'=x^{3}(e^{x})+e^{x}(3x^{2})$$

$$=e^{x}(x^{3}+3x^{2})$$

مثـــــال (4.22): أوجد تفاضل الدالة:

$$y=e^{x^{2}-3x}$$

الحـــــــل:

تفاضل ($e^{x^{2}-3x}$) هو نفسه ($e^{x^{2}-3x}$)، ثم نفاضل الأس؛

$$\frac{dy}{dx}=y'=e^{x^{2}-3x}(2x-3)$$

مثـــــال (4.23): أوجد تفاضل الدالة:

$$y=\ell n4x$$

الحـــــــل:

نكتب الدالة على أنها حاصل جمع حدين كالتالي:

$$y=\ell n4+\ell n\,x$$

نفاضل؛

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{d}{dx}\ell n4+\frac{d}{dx}\ell n\,x$$

تفاضل الحد الأول صفر، لأن $(\ell n 4)$ مقدار ثابت؛

$$y' = 0 + \frac{1}{x}$$

أي أن:

$$y' = \frac{1}{x}$$

مثـــال (4.24): أوجد تفاضل الدالة:

$$y = \ell og(3x^2 - 4x)$$

الحـــل:

نفاضل أولا اللوغاريتم، ثم نفاضل داخل القوس؛

$$\frac{dy}{dx} = y' = \left[\frac{1}{(3x^2 - 4x)}\right][6x - 4]$$

$$= \frac{6x - 4}{(3x^2 - 4x)}$$

(4.7) معادلة المماس (the tangent equation)

إذا كانت الدالة $f(x)$ تمثل منحنى، وكانت (x_0) في نطاق الدالة $f(x)$، فإنه يوجد خط مستقيم يمس هذا المنحنى في نقطة واحدة فقط هي (x_0, y_0) أو $(x_0, f(x_0))$ بحيث تكون:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

موجودة أو ما لا نهاية. فإذا كانت الدالة موجودة فإن الخط المستقيم يكون مماسا للدالة عند هذه النقطة، وتكون نهاية الدالة هي ميل المماس، أي أن:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

حيث (m) ميل المماس، وتكون معادلة المماس عند النقطة (x_0, y_0):

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

أما إذا كانت النهاية $(+\infty)$ أو $(-\infty)$، فإن المماس يكون عموديا، أي موازيا للمحور (y) عند هذه النقطة.

****

ويكون ميل العمودي على المماس هو $(-\frac{1}{m})$، حيث $(m \neq 0)$ وتكون معادلة العمودي على المماس:

$$(y-y_0)=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

مثـــال (4.25): أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة $(x=2)$ للدالة:

$$f(x)=5x^2-4x$$

الحـــل:

نجد أولا (y_0) من معادلة الدالة:

$$f(x)=\ y=5x^2-4x$$

$$f(2)=y_0=5(2^2)-4(2)$$

$$=20-8=12$$

أي المماس سيكون عند النقطة $(2,12)$.

ثم نجد ميل المماس وذلك بتفاضل الدالة؛

$$\frac{dy}{dx}=10x-4$$

فيكون الميل عند $(x_0=2)$؛

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0=2}=10(2)-4=16$$

أي أن معادلة المماس:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-12=16(x-2)$$

$$y-12=16x-32$$

$$y=16x-20$$

أما معادلة العمودي على المماس فهي:

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

$$y-12=-\frac{1}{16}(x-2)$$

$$y=-\frac{1}{16}x+\frac{2}{16}+12$$

$$y=-\frac{1}{16}x+12.125$$

مثـــال (4.26): أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة $(x=-1)$ للدالة:

$$f(x)=x^3+5x+7$$

الحـــل:

$$f(x) = y=x^3+5x+7$$

$$f(-1)=y_0=(-1)^3+5(-1)+7$$

$$=-1-5+7=1$$

أي أن نقطة المماس هي $(-1,1)$.

ونجد ميل المماس من تفاضل الدالة:

$$\frac{dy}{dx}=3x^2+5$$

فيكون ميل المماس عند النقطة $(x_0=-1)$ هو:

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0=-1}=3(-1)^2+5=3+5$$

$$=8$$

وتكون معادلة المماس:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-1=8(x-(-1))$$

$$y-1=8x+8$$

$$y=8x+9$$

وتكون معادلة العمودي على المماس:

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

$$y-1=-\frac{1}{8}(x-(-1))$$

$$y-1=-\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}$$

$$y=-\frac{1}{8}x+\frac{7}{8}$$

مثـــال (4.27): أوجد معادلة المماس عند النقطة $(3,4)$ للدالة:

$$x^2+y^2=25$$

الحـــل:

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$y\frac{dy}{dx}=-x$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

أي أن ميل المماس؛

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}$$

فتكون معادلة المماس:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$$

$$y-4=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}+4$$

$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

أمثلة متنوعة (4)

مثـــال (1): أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية بإستخدام المبادئ الأولية للتفاضل:

$a)\quad f(x)=9x-2 \qquad , \quad b)\quad f(x)=34$

$c)\quad f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} \qquad , \quad d)\quad f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

الحـــــل:

$$a)\quad \frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[9(x+h)-2]-(9x-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(9x+9h-2)-(9x-2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{9x+9h-2-9x+2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{9h}{h}$$

$$=9$$

$$b)\quad \frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{34-34}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$c)\quad \frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(x+h)^2+1}{2(x+h)}-\frac{x^2+1}{2x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x(x+h)^2+x-(x^2+1)(x+h)}{2x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x(x^2+2xh+h^2)+x-(x^3+x+x^2h+h)}{2x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x^3+2x^2h+xh^2)+x-x^3-x-x^2h-h)}{2x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x^2h+xh^2-h)}{2x(x+h)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+xh-1}{2x(x+h)}$$

$$=\frac{x^2-1}{2x^2}$$

d) $\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)-2}-\frac{1}{x-2}\right]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(x-2)-(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-2-x-h+2}{x^2+xh-4x-2h+4}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x^2+xh-4x-2h+4}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+xh-4x-2h+4}$$

$$=\frac{-1}{x^2-4x+4}=\frac{-1}{(x-2)^2}$$

مثـــال (2): أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

a) $f(x)=5x^3-\frac{3}{x^2}$, b) $f(x)=(x^2-1)^3$

c) $f(x)=\frac{4x-5}{3x+2}$, d) $f(x)=x^2(3x^4-7x+2)$

الحـــــل:

a) $y=f(x)=5x^3-\frac{3}{x^2}$

$$=5x^3-3x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=15x^2+6x^{-3}$$

$$=15x^2+\frac{6}{x^3}$$

b) $y=f(x)=(x^2-1)^3$

$$\frac{dy}{dx}=y'=3(x^2-1)^2(2x)$$

$$=6x(x^2-1)^2$$

c) $y=f(x)=\frac{4x-5}{3x+2}$

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{(3x+2)(4)-(4x-5)(3)}{(3x+2)^2}$$

$$=\frac{12x+8-12x+15}{(3x+2)^2}$$

$$=\frac{23}{(3x+2)^2}$$

d) $y=f(x)=x^2(3x^4-7x+2)$

$$\frac{dy}{dx}= y' = x^2\left[12x^3-7\right]+(3x^4-7x+2)(2x)$$

$$=12x^5-7x^2+6x^5-14x^2+4x$$

$$=18x^5-21x^2+4x$$

مثـــال (3): إذا كانت:

$y=u^4+4$, $x=5u^2-4$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{du}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)}$$

$$=\frac{4u^3}{10u}=\frac{2}{5}u^2$$

مثـــال (4): إذا كانت:

$y=u^3$, $u=(x^2-3x+8)$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$=3u^2(2x-3)$$

وبالتعويض عن (u)؛

$$\frac{dy}{dx}=3(x^2-3x+8)^2(2x-3)$$

مثـــال (5): إذا كانت:

$y=u^3$, $u=(4+v^2)$, $v=2\sqrt{x}$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$=3u^2 .2v.\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$=3(4+v^2)^2(4\sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$=12(4+4v^2)^2$$

مثال (6): أوجد التفاضل للدوال التالية:

a) $y=x^3 \sin x$, b) $y=2x\cot x+x^2 \tan x$

c) $y=\tan^2 3x$, d) $y=\frac{x}{\sin x}$

الحل:

a) $y=x^3 \sin x$

$$\frac{dy}{dx}=x^3(\cos x)+\sin x(3x^2)$$

$$=x^3 \cos x+3x^2 \sin x$$

b) $y=2x\cot x+x^2 \tan x$

$$\frac{dy}{dx}=2x(-\csc^2 x)+\cot x(2)+x^2(\sec^2 x)+\tan x(2x)$$

$$=-2x\csc^2 x+2\cot x+x^2 \sec^2 x+2x\tan x$$

c) $y=\tan^2 3x$

$$\frac{dy}{dx}=2\tan 3x(\sec^2 3x)(3)$$

$$=6\tan 3x\sec^2 3x$$

d) $y=\frac{x}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x(1)-x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$$

مثال (7): أوجد التفاضل الأول للدوال التالية:

a) $y=e^{3x^2}$, b) $y=(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}$

c) $y=x^2 e^{-2x}$, d) $y=e^{-2x}\ell n\, x$

الحـــــل:

a) $y=e^{3x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=e^{3x^2}(6x)=6xe^{3x^2}$$

b) $y=(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1+e^{2x})}}(e^{2x}(2))$$

$$=\frac{e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})}}$$

c) $y=x^2e^{-2x}$

$$\frac{dy}{dx}=x^2[e^{-2x}(-2)]+e^{-2x}(2x)$$

$$=e^{-2x}(-2x^2+2x)$$

d) $y=e^{-2x}\ell n x$

$$\frac{dy}{dx}=e^{-2x}(\frac{1}{x})+\ell n x[e^{-2x}(-2)]$$

$$=e^{-2x}(\frac{1}{x}-\ell n x)$$

مثـــال (8): فاضل الدالتين التاليتين:

a) $y=\ell n^2(x+3)$, b) $y=\ell n\frac{x^4}{(3x-4)^2}$

الحـــــل:

a) $y=\ell n^2(x+3)$

$$\frac{dy}{dx}=2[\ell n(x+3).\frac{1}{(x+3)}]=\frac{2\ell n(x+3)}{(x+3)}$$

b) $y=\ell n\frac{x^4}{(3x-4)^2}$

وباستعمال قوانين اللوغاريتمات يمكن كتابتها كالتالى:

$$y=\ell n x^4-\ell n(3x-4)^2$$

$$=4\ell n x-2\ell n(3x-4)$$

$$=4(\frac{1}{x})-2\left[(\frac{1}{3x-4})(3)\right]$$

$$=\frac{4}{x}-\frac{6}{3x-4}$$

مثـــال (9): أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة $(x_0 = 2)$ للدالة:

$$f(x) = y = 3x + 2$$

الحـــــل:

نجد (y_0)؛

$$f(2) = y_0 = 3(2) + 2 = 8$$

أي أن نقطة التماس $(2, 8)$.

ونجد ميل المماس من تفاضل الدالة:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0 = 2} = 3$$

أي أن ميل المماس (3) فتكون معادلة المماس:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 8 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6 + 8$$

$$y = 3x + 2$$

وتكون معادلة العمودي على المماس:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

$$y - 8 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 8$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{26}{3}$$

مثـــال (10): أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة $(x_0 = 2)$ للدالة:

$$f(x) = y = (x - 1)^2$$

الحـــــل:

نجد أولا (y_0)؛

$$f(2) = y_0 = (2 - 1)^2 = 1$$

أي أن نقطة التماس $(2, 1)$. ونجد ميل المماس بتفاضل الدالة:

$$\frac{dy}{dx}=2(x-1)$$

أي أن:

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0=2}=2(2-1)=2$$

فتكون معادلة المماس:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y-1=2(x-2)$$

$$y=2x-4+1$$

$$y=2x-3$$

وتكون معادلة العمودي على المماس:

$$y-y_0=-\frac{1}{m}(x-x_0)$$

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$$

$$y=-\frac{1}{2}x+1+1$$

$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

مسائل (4)

مسألة (1): أوجد بإستخدام المبادئ الأولية للتفاضل المشتقة الأولى للدالتين:

a) $f(x)=3x-4$, b) $f(x)=\frac{1}{x-2}$

مسألة (2): أوجد المشتقة الأولى للدالتين:

a) $f(x)=4\sqrt{x^3}$ at $x=9$

b) $f(x)=2x^3+3x^2-5x+8$ at $x=0$

مسألة (3): أوجد المشتقة الأولى للدالتين:

a) $f(x)=\frac{x}{x+1}$, b) $f(x)=(3x^2+4x)^4$

مسألة (4): أوجد المشتقة الأولى للدالتين:

a) $f(x)=5x(3x+1)^2$ at $x=1$

b) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+5}$ at $x=-1$

مسألة (5): بإستخدام المبادئ الأولية للتفاضل أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

a) $f(x)=x^2+4x$, b) $f(x)=2x-5x^2$

c) $f(x)=8\sqrt{x}$, d) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-7$

مسألة (6): أوجد المشتقة الأولى بإستخدام المبادئ الأولية للتفاضل للدالتين:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, b) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+1$

مسألة (7): أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, b) $f(x)=4x^3-6x^2-9x+10$

c) $f(x)=-5x^{-17}-8$, d) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

مسألة (8): أوجد المشتقة الأولى للدالتين:

a) $f(x)=(x-\dfrac{1}{x})(x^2-\dfrac{1}{x^2})$

b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{5-3x}$

مسألة (9): إذا كانت:

$y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=(x^2+1)$

أوجد $(\dfrac{dy}{dx})$.

مسألة (10): إذا كانت:

$y = \tan(3u) \quad , \quad u = x^2$

أوجد $(\frac{dy}{dx})$.

مسألة (11): أوجد تفاضل الدوال التالية:

a) $f(x) = \sin(x^2 + 2)$

b) $f(x) = \cos^5(3x)$

c) $f(x) = \sec(2x+1)^2$

d) $f(x) = \cos(3x^2) + \cos^2(3x)$

مسألة (12): أوجد تفاضل الدوال التالية:

a) $y = \ell n\, x^3$, b) $y = x\, \ell n(3x)$

c) $y = x^2 e^x$, d) $y = e^{\frac{1}{x}}$

مسألة (13): أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة $(x = 0)$ للدالة:

$y = \sqrt{x+1}$

مسألة (14): أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة $(x = 2)$ للدالة:

$y = 3x^2 - 2x$

إجابات (3)

1-a) 3 b) $-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

2-a) 18 b) -5

3-a) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ b) $(24x+16)(3x^2+4x)^3$

4-a) 190 b) $\dfrac{7}{8}$

5-a) $2x+4$ b) $2-10x$

c) $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ d) $2x^2$

6-a) $-\dfrac{1}{(x-2)^2}$ b) $\dfrac{1}{2}x$

7-a) $-\dfrac{1}{(x^2+2)^2}$ b) $12x^2-12x-9$

c) $85x^{-18}$ d) $2x-\dfrac{2}{x^3}$

8-a) $3x^2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}-1$ b) $\dfrac{7}{(5-3x)^2}$

9) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

10) $6x\sec^2(3x^2)$

11-a) $2x\cos(x^2+2)$ b) $-15\cos^4(3x)\sin(3x)$

c) $4(2x+1)\sec(2x+1)^2\tan(2x+1)^2$

d) $-6x\sin(3x^2)-6\cos(3x)\sin(3x)$

12-a) $\dfrac{3}{x}$ b) $1+\ell n(3x)$

c) $e^x(x^2+2x)$ d) $-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

13) $y=\dfrac{1}{2}x+1$, $y=-2x+1$

14) $y=10x-12$, $y=-\dfrac{1}{10}x+\dfrac{41}{5}$